Aufgabe 1 (3+1=4 Punkte) (Regelflächen)
Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, $V : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ genügend oft differenzierbar und $X : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Regelfläche $X(t,s) = \alpha(t) + sV(t)$ mit $|V(t)| = 1$.

(a) Berechnen Sie an den Stellen, wo X regulär ist, die Koeffizienten der ersten und der zweiten Fundamentalform und zeigen Sie, dass überall $K \leq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie: $K \equiv 0 \iff \mathcal{T}(X,(s,t))$ ist unabhängig von s.

Aufgabe 2 (3+1=4 Punkte) (Möbiusband)

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform sowie die Gaußsche und mittlere Krümmung für das Flächenstück $X : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X(s,t) = (\cos s, \sin s, 0) + tV(s)$$

mit $V(s) = \cos(s/2)(\cos s, \sin s, 0) + \sin(s/2)(0,0,1)$.

(b) Zeigen Sie für alle $(s,t) \in \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dass $X(s,t) = X(s+2\pi, -t)$. Fertigen Sie ein (grobe) Zeichnung oder ein Papiermodell an. Zeichnen Sie speziell die Kurven $s \mapsto X(s,0)$ und $s \mapsto X(s, \pm\frac{1}{4})$.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2-Flächenstück mit $f(X(q)) = 0$ und $\nabla f(X(q)) \neq 0$ für alle $q \in U$. Zeigen Sie für $q \in U$ und $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$, dass

$$II_q(w_1, w_2) = -\frac{D^2 f(X(q))(DX(q)w_1, DX(q)w_2)}{\langle \nabla f(X(q)), N(q) \rangle}.$$

(b) Sei $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein (parametrisiertes) Flächenstück der Gestalt $X(u,v) = (u, v, g(u,v))$ für eine C^2-Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von X.
Hinweis: Sie können z.B. $f(x,y,z) = g(x,y) - z$ setzen und Aufgabenteil (a) verwenden.