Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Rotationsfläche $X(s,t) = (x(s), y(s)\cos t, y(s)\sin t)$ für eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $s \in I \mapsto \alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$.
Bestimmen Sie alle solchen Rotationsflächen mit $H \equiv 0$. Zeigen Sie dabei, dass sich jede dieser Flächen nach Umparametrisierung darstellen lässt als

$$\tilde{X}(u,v) = \left(u + u_0, a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\cos v, a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\sin v\right)$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Die Fläche $\tilde{X}$ heißt Katenoid.
Hinweis: Benutzen Sie $H(s,t) = \frac{1}{2x'y}\left(1 - (\frac{y^2}{2})''\right)$ (siehe Anw-Blatt 10). Außerdem ist $F(s) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{a}\right)$ eine Stammfunktion von $f(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Scherksche Fläche)
Betrachten Sie die Fläche $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : e^z \cos x = \cos y\}$.

$$F_0 := F \setminus \left\{ \left((m+\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi\right) : m,n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

lässt sich darstellen als Graph der Funktion

$$f : \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} (m - \frac{1}{2}\pi, m + \frac{1}{2}\pi) \times (n - \frac{1}{2}\pi, n + \frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \log(\cos x) - \log(\cos y).$$

Zeigen Sie, dass F_0 eine Minimalfläche ist. Skizzieren Sie einen Ausschnitt von F_0.

Aufgabe 3 (1+2+1=4 Punkte) (Parallelflächen)
Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres C^2-Flächenstück. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die *Parallelfläche* zu X mit Abstand λ gegeben durch $X_\lambda(q) := X(q) + \lambda N(q)$.

(a) Zeigen Sie: X_λ ist genau dann singulär an der Stelle $q \in U$, wenn $\lambda = \frac{1}{k_1(q)}$ oder $\lambda = \frac{1}{k_2(q)}$ ist, wobei $k_1(q)$ und $k_2(q)$ die Hauptkrümmungen in q sind (in diesem Fall heißt $X_\lambda(q)$ Fokalpunkt zu X an der Stelle q).
Hinweis. Benutzen Sie, dass $DN(q) = -DX(q) \circ L_q$ ist.

(b) Sei $|\lambda| < \frac{1}{|k_1(q)|}, \frac{1}{|k_2(q)|}$ für alle $q \in U$. Wie hängen die Krümmungsgrößen $k_{1,\lambda}, k_{2,\lambda}, H_\lambda, K_\lambda$ von X_λ mit denen von X zusammen?
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $N_\lambda = N$, und bestimmen Sie Hauptkrümmungen mit Hilfe von (a).

(c) Zeigen Sie: Ist X_λ an der Stelle q regulär, so ist $X_{\lambda_0}(p)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, genau dann ein Fokalpunkt zu X_λ an der Stelle q, wenn $X_{\lambda_0}(p)$ ein Fokalpunkt zu X an der Stelle q ist.