Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2020, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 25.5.2020
Dr. A. DelaTorre

Aufgabe 1 (*Evolute*) (8 Punkte)

Es sei $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Weiterhin gelte $\kappa(t) > 0$ und $\kappa'(t) \geq 0$ für alle t. Für $t_0 \in [0, \infty)$ ist der *Krümmungsmittelpunkt* $m_c(t_0)$ gegeben durch

$$m_c(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0).$$

Der *Krümmungskreis* oder *Schmiegkreis* an $c(t_0)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $m_c(t_0)$ und Radius $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$. Wir betrachten die Kurve der Krümmungsmittelpunkte, die so genannte *Evolute* $m_c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto m_c(t)$..

(A)
(i) Zeigen Sie, dass für die Ableitung von m_c folgendes gilt:

$$\dot{m}_c(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2} n(t).$$

(ii) Berechnen Sie $\|\dot{m}_c\|$ und die Bogenlänge $L(m_{c|[a,b]})$ der auf ein Intervall $[a, b] \subset [0, \infty)$ eingeschränkten Evolute.

(iii) Folgern Sie aus (ii), dass gilt:

$$\|m_c(a) - m_c(b)\| \leq \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}.$$

(iv) Beweisen Sie nun, dass für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ gilt: Der Krümmungskreis an $c(t_2)$ ist im Krümmungskreis an $c(t_1)$ enthalten. Insbesondere gilt für jedes $t_0 \in [0, \infty)$: Die restliche Kurve $c_{|[t_0,\infty)}$ verlässt nicht den Krümmungskreis an $c(t_0)$.

(v) Zeigen Sie, dass die Evolute endliche Länge hat, d. h. $L(m_c) = \lim_{b\to\infty} L(m_{c|[0,b]})$ existiert und ist endlich. Folgern Sie, dass die Evolute einem Grenzpunkt $m_c(\infty) := \lim_{t\to\infty} m_c(t)$ zustrebt.

(vi) Beweisen Sie, dass $\|m_c(\infty) - c(t)\|$ für $t \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Bitte wenden Sie!

(B) Zeigen Sie, dass die Evolute der Normalparabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$ gegeben ist durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y - \frac{1}{3})^3 = \frac{27}{16} x^2\}.$$

Aufgabe 2 (*Elastische Energie von Kurven*) (2 Punkte)
Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert Kurve und geschlossen mit Umlaufzahl $n_c \neq 0$. Zeigen Sie

$$\int_0^L \kappa^2 ds \geq \frac{4\pi^2}{L},$$

mit Gleichheit nur für Kreise.
Bemerkung: Die Aussage gilt auch, falls $n_c = 0$.

Aufgabe 3 (*Raumkurve*) (6 Punkte)

1) Berechnen Sie für $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ($a > 0, b > 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$) die Frenetgleichung und die zugehörige Krümmung und Torsion.

2) Sei $b : I = [t_0, t_1] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Definiere $c := \int_{t_0}^t b(s) \times b'(s) dt$. Zeigen Sie:
a) Die Torsion τ von c ist konstant, und
b) Jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit konstanter Torsion (o.E. $\tau = 1$ — warum?) kann auf diese Weise konstruiert werden.

3) Finden Sie die Bedingung für die Raumkurve mit $\tau(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstang, 2.6.2020 vor 12:00**.