Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG
Prof. Dr. G. Wang
Dr. A. DelaTorre

SS 2020, Serie 06
15.6.2020

Aufgabe 1 (*Der Rotationstorus*) (4 Punkte)

Der Rotationstorus ist durch

$$F(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u), \quad 0 < u, v < 2\pi, 0 < r < R$$

gegeben, vgl. Aufgabe 1, Serie 05. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform, die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 2 (*Tschebyscheff-Netz*) (4 Punkte)

Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung mit $U = (0, A) \times (0, B)$. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für jedes Rechteck $R = [u^1, u^1 + a] \times [u^2, u^2 + b] \subset U$ sind die gegenüberliegenden Seiten von $F(R)$ gleich lang.

(ii) Es gilt $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0$ in ganz U.

Man zeige ferner, dass unter diesen beiden Bedingungen eine Parametertransformation $\phi : U \to \widetilde{U}$ existiert, so dass bzgl. der Parametrisierung $\widetilde{F} := F \circ \phi^{-1}$ die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

hat, wobei θ der Winkel zwischen den Koordinatenlinien ist.
(*Hinweis. Setze* $\phi(u^1, u^2) = (\int \sqrt{g_{11}} du^1, \int \sqrt{g_{22}} du^2)$)

Aufgabe 3 (*geodätische und Normal-Krümmung, geodätische Torsion*) (4 Punkte)

Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Bild ganz innerhalb einer regulären Fläche S verläuft. Das Darboux-3-Bein E_1, E_2, E_3 ist dann definiert durch $E_1(s) = c'(s)$, $E_3(s) = N(c(s))$, $E_2(s) = E_3(s) \times E_1(s)$. Dabei bezeichnet N bezeichnet die Einheitsnormale an die Fläche. Man leite für dieses 3-Bein die folgenden Ableitungsgleichungen her, die den Frenet-Gleichungen entsprechen:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei treten die folgenden Größen auf: $\kappa_g = \langle c'', E_2 \rangle$ (*die geodätische Krümmung*) $\kappa_n = II(c', c')$ (*die Normalkrümmung*) sowie eine *geodätische Torsion* τ_g.

Aufgabe 4 (*Gauß-Abbildung kompakter Flächen*) (4* Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche.

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung $N : S \to \mathbb{S}^2$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $K \geq 0$, falls die Gauß-Abbildung auch injektiv ist.

c) Verbessern Sie a) und zeigen Sie, dass die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf $S_+ := \{x \in S | K(x) \geq 0\}$ surjektiv ist.

Hinweis. Für ein beliebiger Einheitsvektor $n \in \mathbb{S}^2$ *betrachte die Familie der Ebenen, auf der* n *senkrecht steht. Einer davon hat die gewünschte Eigenschaft.*

*Beachten Sie, dass * Bonuspunkte bedeutet.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 22.6.2020 vor 12:00**.