Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2020, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 6.7.2020
Dr. A. DelaTorre

Aufgabe 1 (*Kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre und

$$c : \mathbb{R} \to S, \quad c(t) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta)^t,$$

mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ fest. Die Kurve c beschreibt einen Breitenkreis. Sie zeigen: Die kovariante Ableitung von c' verschwindet genau dann, wenn $\theta = 0$.

Aufgabe 2 (*Kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Definition 3.25 hängt nicht davon ab, welche Kurve c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = w_p$ man nimmt.
(*Hinweis.* Zeigen Sie, dass für die kovariante Ableitung in Richtung $w_p = \sum_{k=1}^2 \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$ ausgedrückt in einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) gilt:

$$\nabla_{w_p}(\sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}) = \sum_k (\sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u)\eta^l + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i(u)\eta^j)\frac{\partial F}{\partial u^k}$$

wobei $v = \sum_{k=1}^2 \xi^k(u)\frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$.)

Aufgabe 3 (*Torsion-frei*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für je zwei glatte Vektorfelder v und w auf einer regulären Fläche mit erster Fundamentalform

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w]$$

gilt.

Aufgabe 4 (*Gauß-Krümmung und Riemannsche Krümmung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung bzgl. einer lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} g^{jk} R_{ijk}^i.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.7.15, vor 12:00**.