Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2020, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 13.7.2020
Dr. A. DelaTorre

Aufgabe 1 (*Zurückgezogene riemannsche Metrik*) (4 Punkte)

Wie in Aufgabe 2 von Blatt 04 seien die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1, 0, 0)$ gegeben durch

$$p_N : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad p_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, x_2).$$

Sei I die erste Fundamentalform von $\mathbb{S}^2$ und sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2\backslash\{N\}$ die Inverse von p_N. Berechnen Sie die zurückgezogene riemannsche Metrik $\phi^*(I)$.

Aufgabe 2 (*Poincaré-Halbebene*) (4 Punkte)

Die Poincaré-Halbebene ist erklärt als die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ mit einer Riemannschen Metrik:

$$(g_{ij}) = y^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie die Differentialgleichung für die Geodätischen her und finden Sie die Geodätischen.

(*Hinweis*: Die Geodätischen sind die Halbgeraden mit konstantem x sowie die Halbkreise, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.)

Aufgabe 3 (*Gauß-Krümmung einer Metrik*) (4 Punkte)

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Im Fall $\kappa \geq 0$ sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, im Fall $\kappa < 0$ dagegen sei $S = \{(x, y, 0) \,|\, x^2 + y^2 < -\frac{4}{\kappa}\}$. Auf S sei die riemannsche Metrik g in den kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$(g_{ij}(x, y))_{ij} = \frac{1}{(1 + \kappa(x^2 + y^2)/4)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.

Aufgabe 4 (*Geodäten auf Drehflächen, geodätische Krümmung*) (6 Punkte)

Es sei $c(t) = (u(t), z(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert mit $\rho > 0$ und $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, z(u))$ die zugehörige Drehfläche.

a) Berechnen Sie die kovarianten Ableitungen $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial u}$, $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial v}$ und $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial v}} \frac{\partial F}{\partial v}$.

b) Zeigen Sie: Die Kurven $u \to F(u, v)$ (Meridiane) sind Geodäten für alle $v \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise $v \mapsto F(u, v)$ für festes u. Und Zeigen Sie: Die Kurven $v \to F(u, v)$ (Breitenkreise) sind Geodäten genau für diejenigen $u \in I$ mit $\rho'(u) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 20.7.15, vor 12:00**.