Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2020, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 20.7.2020
Dr. A. DelaTorre

Aufgabe 1 (*Geodätische*) (4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g, sei $p \in S$ und $v \in T_pS$. Sei c die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Sei $\delta \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Kurve $\tilde{c}(t) := c(\delta t)$ die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $\tilde{c}(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = \delta v$ ist.

Aufgabe 2 (*Parallelverschiebung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung ein Konzept der inneren Geometrie ist. Genauer heißt es: Ist $c : I \to S_1$ eine glatte Kurve, v ein glattes Vektorfeld längs c und $f : S_1 \to S_2$ eine lokale Isometrie, dann ist v parallel längs c genau dann, wenn $df \circ v$ parallel längs $f \circ c$. Folgern Sie daraus ferner, dass für $I = [t_0, t_1]$, $c(t_0) = p$, $c(t_1) = q$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T_pS_1 \arrow[r, "P_c"] \arrow[d, "d_pf"'] & T_qS_1 \arrow[d, "d_qf"] \\
T_{f(p)}S_2 \arrow[r, "P_{f\circ c}"] & T_{f(q)}S_2
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3 (*Parallelverschiebung*) (4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g, Sei $c : I \to S$ eine konstante Kurve, $c \equiv p$. Ein Vektorfeld längs c ist also eine Abbildung $v : I \to T_pS$. Zeigen Sie, dass v genau dann parallel ist, wenn v konstant ist.

Aufgabe 4 (*Jacobi-Feld*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass auf einer Drehfläche mit Parametrisierung $F(t, \varphi) = (r(t)\cos(\varphi), r(t)\sin(\varphi), t)^t$ das Vektorenfeld $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ ein Jacobi-Feld längs der Meridiankurven ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.7.20, vor der Vorlesung**.