Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2020, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 27.7.2020
Dr. A. DelaTorre

Aufgabe 1 (*Fläche-mit-Rand*) ()

Sie Zeigen, dass die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ eine Fläche-mit-Rand ist.

Aufgabe 2 (*Fläche-mit-Rand*) ()

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene Raumkurve mit periode L. Sei S_{reg} die Regelfläche, die durch die Parametrisierung $F(t, s) = c(t) + sv(t)$ gegeben ist, $v(t + L) = \pm v(t), s \in (-1, 1)$.
a) Zeigen Sie, dass $S := F(\mathbb{R} \times [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}])$ eine Fläche-mit Rand ist.
b) Sie zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- S_{reg} ist orientierbar,
- $v(t + L) = +v(t)$ für alle t,
- Der Rand von S ist die disjunkte Vereinigung von *zwei* Raumkurven.

c) Was ist der Rand von S im nicht orientierbaren Fall, z. B. für das Möbiusband, vgl. Aufgabe 3 in der Serie. 5

Aufgabe 3 (*Divergenz*) ()

Zeigen Sie, dass für differenziebare Funktion f und differenziebare Vektorfeld gilt:

$$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + g(\operatorname{grad}f, X)$$

Aufgabe 4 (*Divergenzsatz und harmonische Funktion*) ()

Sei S kompakte reguläre Fläche (ohne Rand). Je zwei Punkte in S seien durch eine Kurve in S verbindbar. Zeigen Sie, dass die konstanten Funktionen die einzigen harmonischen Funktionen auf S sind.

Im Prinzip sollen die Masterstudenten diese Aufgaben lösen. In der mündlichen Prüfung des Masterstudiums könnten solche Fragen gefragt werden. Eine Probe-Klausur wird am Wochenende in Ilias hochgeladen.