Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis SS 2018, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang 23.4.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $M > 0$. Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathcal{H} := \{f : U \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ holomorph mit } |f| \le M\}$$

ist gleichgradig stetig.
Hinweis: Sie benutzen die Cauchy Integralformel (Satz 2.3, Analysis II).

Aufgabe 2 (4 Punkte)
a) Es sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Dimension von V genau dann endlich ist, wenn alle linearen Abbildungen $f : V \to \mathbb{K}$ beschränkt sind.
b) Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist beschränkt.
2. $\sup\{|Ax| \,:\, x \in M\} < \infty$ für jedes $A \in X'$.

Benutzen Sie für Aufgabenteil b) den Satz von Banach Steinhaus den Sie in jedem Buch über Funktionalanalysis finden.
Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für $I = [0,1]$ sei $K : (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)})$ gegeben durch

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy, \qquad \text{wobei } k \in C^0(I \times I).$$

Berechnen Sie die Operatornorm von K.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
a) Seien E, F, G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A \in L(E, F; G) \to L(E, (L(F,G)) \ni \tilde{A}$$

mit $A(x,y) = (\tilde{A}(x))(y)$ eine normtreuen Isomorphismus.
b) Sei $T_n \in L(X,Y)$ eine Folge von Abbildungen eines Banachraumes in einen normierten Raum, so dass für alle $x \in X$ ein $T(x) \in Y$ mit

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

existiert. Beweisen Sie, dass $T \in L(X,Y)$ mit $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$ gilt. Konstruieren Sie außerdem ein Beispiel mit $\|T\| < \liminf \|T_n\|$! Auch hier dürfen Sie den Satz von Banach Steinhaus anwenden. (Sie brauchen das um die Stetigkeit von T zu zeigen.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 30.4. vor der Vorlesung**.