Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 30.4.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ wobei $0 < \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, dass f Hölderstetig ist genau für die Exponenten $0 < \gamma \leq \alpha$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Sei $\mathcal{A}$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Metrik (vgl. Serie 1, Aufgabe 2)

$$d(A_1, A_2) = \inf \{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\ A_2 \subset B_\varrho(A_1)\},$$

wobei $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \varrho\}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \overline{B_R(0)}\}$$

kompakt ist.
Hinweis: Arzela-Ascoli für $f_A : \overline{B_R(0)} \to [0, \infty),\ f_A(x) = \operatorname{dist}(x, A)$.

b) Sei $X = C^0([0,1])$ und K der Operator von Blatt 2, Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{K} = \{Kf : f \in \overline{B_1(0)}\}$$

relativ kompakt in X ist (d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt in X).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beschränkter Maßraum, d.h., $\mu(X) < \infty$, außdem nichttrivial, d.h., $\mu(X) > 0$, und für μ-messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ sei

$$\Phi_p(f) := \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } f \in L^p(X, \mu), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $p \mapsto \Phi_p(f)$ ist monoton nichtfallend und für $f \in L^\infty(X, \mu)$ gilt

$$\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p \to \infty} \Phi_p(f) = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 6.5. vor der Vorlesung**.