Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 7.5.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten, reellen Folgen $\mathbf{x} = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x^i|$. Finden Sie ein Funktional $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{R})'$ mit $\|\phi\| = 1$ und folgenden weiteren Eigenschaften:

(1) $\phi(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x^i$, falls dieser Grenzwert existiert,

(2) $\liminf_{i\to\infty} x^i \le \phi(x) \le \limsup_{i\to\infty} x^i$,

(3) $\phi\big((x^1, x^2, x^3, \dots)\big) = \phi\big((x^2, x^3, \dots)\big)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $e_i := (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ für $i \in \mathbb{N}$, $e := (1)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Zeigen Sie: es existiert $\varphi \in (l^\infty)'$ mit

$$\varphi(e) \neq 0 \text{ und } \varphi(e_i) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie weiter, es gibt kein $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^1$ mit

$$\varphi(x) = \sum_{j=k}^{\infty} x_k y_k \text{ für alle } x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty.$$

Schließen Sie daraus, dass die Einbettung $J : l^1 \to (l^\infty)'$, $(Jy)(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$, nicht surjektiv ist.
(*Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach.*)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei E ein reeller (oder komplexer) normierter Raum, und es gelte

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf E mit $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ für alle $x \in E$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie den folgenden Trennungssatz von Hahn-Banach in einem Hilbertraum mittels des Projektionssatzes.
$M \subset X$ sei abgeschlossen und konvex, und set $x \notin M$. Dann existiert $\varphi \in X'$ mit

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \inf\{\operatorname{Re}\varphi(y) : y \in M\}.$$

————————————

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 28.5. vor der Vorlesung**.