Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang — 4.6.2018
MSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (Schwache Konvergenz). (4+4 Punkte)
Teil A.
(i) Sei X ein normierter Raum. Es ist äquivalent: $x_n \rightharpoonup x$ in $X \Leftrightarrow \sup \|x_n\| < \infty$ und es existiert eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $\langle x_n, \phi \rangle \to \langle x, \phi \rangle$ für alle $\phi \in D$.

(ii) Eine Folge $(x_n) \subset X$ ist schwache Cauchyfolge $\Leftrightarrow \sup \|x_n\| < \infty$ und es existiert eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $(\langle x_n, \phi \rangle)_n$ ist Cauchyfolge für alle $\phi \in D$.

Teil B.
In einem Hilbertraum X sind äquivalent: $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für eine reelle Folge (s_n) ist äquivalent: $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ Für alle reellen Nullfolgen (t_n) konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$.

Aufgabe 3 (Konvexe Mengen in Banachräumen) (4 Punkte)
Sei X ein reeller, normierter Raum und $W \subset X$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge. Es gilt für $a \in W^c$:

1. Falls X strikt konvex gibt es maximal ein $x \in W$ mit $\|x - a\| = \inf_{y \in W} \|a - y\|$.
2. Ist X reflexiv, so existiert ein $x \in W$ mit obiger Eigenschaft.

Aufgabe 4 (Direkte Methode der Variationsrechnung). (4 Punkte)
Sei X ein reflexiver Banachraum und $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sei schwach unterhalbstetig d.h. $u_n \rightharpoonup u$ impliziert $\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u)$. Außerdem gelte $J(u) \geq \alpha\|u\| + \beta$ für alle $u \in X$ wobei $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie: Falls $J \neq +\infty$ nimmt J sein Infimum an und dieses liegt in $\mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 11.6. vor der Vorlesung**.