Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 11.6.2018
MSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (Hellinger-Toeplitz) (4 Punkte)
Sei X ein Hilbertraum und $T\colon X \to X$ ein linearer Operator. Existiere $S : X \to X$ mit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.
(*Benutzen Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen.*)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega = (-1, 1)$. Definiere $u \in L^1(\Omega)$ durch

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{für } x < 0, \\ u_2(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $u_1 \in C^1((-1, 0])$ und $u_2 \in C^1([0, 1))$. Zeigen Sie, dass u genau dann eine schwache Ableitung besitzt, wenn $u_1(0) = u_2(0)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Nehmen Sie an, dass Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ ist. Zeigen Sie, dass auch $u \circ \phi \in W^{1,1}_{loc}(\Omega')$, falls $\phi \in C^1(\Omega', \Omega)$ ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie auch die Ableitung $D(u \circ \phi)$!

Aufgabe 4 (Ehrling Lemma) (4 Punkte)

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_3$ seien Normen auf X. Es gelte

- (x_k) in $\|\cdot\|$ beschränkt $\Rightarrow x_{k_l} \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ mit einer Teilfolge von (x_{k_l}). (Die Identität $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ist kompakt.)
- Für eine Konstante $c < \infty$ gilt $\|\cdot\|_3 \le c\|\cdot\|_2$.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C = C(\varepsilon) < \infty$ gibt, so dass

$$\|\cdot\|_2 \le \varepsilon\|\cdot\| + C\|\cdot\|_3.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 18.6. vor der Vorlesung**.