Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang — 18.6.2018
MSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall.
(a) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C = C(I)$ derart existiert, dass

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty \tag{1}$$

gilt. Das bedeutet, dass die Einbettung $W^{1,p}(I) \to L^\infty(I)$ stetig ist.

(b) Weiter sei I beschränkt. Zeigen Sie, dass jede Funktion in $W^{1,p}(I)$ stetig auf $\bar{I}$ ist (dh. einen stetigen Repräsentanten besitzt) und die Einbettung

$$W^{1,p}(I) \to C(\bar{I}), \quad \forall 1 < p \leq \infty \tag{2}$$

kompakt ist, d.h., jede beschränkte Folge in $W^{1,p}(I)$ besitzt eine Teilfolge, die in $C(\bar{I})$ konvergiert.

Hinweis. (a) 1. Mit dem Fortsetzungssatz, können wir annehmen, dass $I = \mathbb{R}$.

2. Zeige zunächst (1) für $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ wie folgt: Seien $G(s) = |s|^{p-1}s$ und $w = G(v)$. Mit dem Hauptsatz gilt

$$|v(x)|^{p-1}v(x) = w(x) = \int_{-\infty}^{x} w'(s)ds$$

Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung und erhalten

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}.$$

Mit der Young-Ungleichung erhalten Sie (1).

3. Schließlich zeigen Sie (1) für $W^{1,p}(\mathbb{R})$ durch Approximation.

(b) Benutzen Sie den Hauptsatz um $|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{\frac{1}{q}}$ für alle Funktion u aus der Einheitskugel von $W^{1,p}(I)$ (wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) zu zeigen und anschließend Ascoli-Arzela.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ elliptisch. Betrachten Sie $G = I \circ L^{-1} \circ I' : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ definiert als

$$Lv(u) = \int_\Omega \langle Du, aDv \rangle$$

und $I : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert als $Iv = v$ und $I' : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ definiert als

$$I'f(u) = \int_\Omega fu.$$

Beweisen Sie zunächst $LGf = f$. Nehmen Sie nun an, dass a symmetrisch und zeigen Sie $G = G^*$ bezüglich des L^2 Skalarproduktes. $G^* : L^2 \to L^2$ ist definiert über die Identität

$$\int_\Omega (Gu)v = \int_\Omega u(G^*v) \quad \text{für alle } u, v \in L^2(\Omega).$$

Aufgabe 3 (*Niveaumengen von Sobolevfunktionen*)

Sei Ω ein offenes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, und $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Sei $Du = 0$ für fast alle x. Zeigen Sie, dass u fast überall konstant ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 25.6. vor der Vorlesung**.