Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 25.6.2018
MSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (Bi-Laplace Operator) (4+4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega) := W_0^{2,2}(\Omega)$ von

$$\Delta^2 u + f = 0 \quad \text{ in } \Omega$$

existiert, d.h. es gibt eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ so, dass

$$\int \Delta u \Delta \phi + f\phi \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Die Norm auf $H_0^2(\Omega)$ ist definiert durch $\|\cdot\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ wie in der Vorlesung. Allerdings gibt es für $H_0^2(\Omega)$ noch eine äquivalente, "bessere" Norm $\|u\|_{H_0^2(\Omega)} := \|D^2 u\|_{L^2}(\Omega)$ (vgl. dazu auch den Raum $H_0^1(\Omega)$.)

Nutzen Sie folgende Anleitung:
a) Mit Hilfe der Poincaré-Umgleichung zeigen Sie zunächst dass die beiden oben erwähnten Normen äquivalent sind.
b) Dann zeigen Sie $\int_\Omega |D^2 u|^2 = \int_\Omega (\Delta u)^2 \ \forall \ u \in H_0^2(\Omega)$, und die Existenz einer schwachen Lösung mit dem Satz von Lax-Milgram.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie sowohl Separabiltät als auch Reflexivität der Räume $W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Benutzen Sie dabei bitte die Abbildung

$$\Lambda : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad \Lambda(f) = (f, Df).$$

Hinweis: Wie vererben sich Separabilität und Reflexivität auf Unterräume?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $I = (0, \infty)$ und $\lambda \neq 0$. Betrachten Sie $A_\lambda : W_0^{1,2}(I) \to L^2(I)$ definiert als $A_\lambda u = u' + \lambda u$. Beweisen Sie

1. $\|u'\|_{L^2} \leq \|A_\lambda u\|_{L^2}$ und $\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|A_\lambda u\|_{L^2}$.
2. A_λ ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild.
3. $(\mathrm{Bild} A_\lambda)^\perp = \{0\}$ und $\mathrm{ind}(A_\lambda) = 0$ für $\lambda > 0$, $(\mathrm{Bild} A_\lambda)^\perp = \mathrm{Span}\{e^{\lambda x}\}$ und $\mathrm{ind}(A_\lambda) = -1$ für $\lambda < 0$.
4. Der Operator $A_0(u) = u'$, d. h. $\lambda = 0$, ist injektiv, jedoch ist $\mathrm{Bild} A_0$ dicht und nicht abgeschlossen.

(*Hinweis: Verwenden Sie die Vertauschbarkeit von Glättung und schwacher Ableitung.*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 2.7. vor der Vorlesung**.