Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 2.7.2018
MSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 ($L^\infty(\Omega)$ *ist nicht separabel.*) (4 Punkte)
Zeigen Sie erst Lemma 12.3.4 mit einem Widerspruch-Argument
Sei X ein Banachraum. Es existiert eine Familie $\{O_i\}_{i\in I}$ mit

1. *$\forall i \in I$ ist O_i eine nichtleere offene Teilmenge von X*
2. *$O_j \cap O_j = \emptyset$, falls $i \neq j$*
3. *I ist nicht anzählbar.*

Dann ist X nicht separabel.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann betrachten Sie die Familie: Für jedes $a \in \Omega$, fixieren wir r_a mit $0 < r_a < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$. Setze $u_a = \chi_{B_{r_a}(a)}$ und

$$O_a := \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}.$$

Zeigen Sie, dass die Familie O_a die Eigenschaften (1)-(3) erfüllt.

Aufgabe 2 (Ehrling Lemma Version.) (4 Punkte)
Seien $K \in K(X,Y)$ und $T \in L(Y,Z)$ injektiv. Sie zeigen, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $C_\epsilon < \infty$ exisiert mit

$$\|Kx\|_Y \leq \epsilon\|x\|_X + C_\epsilon\|TKx\|_Z. \qquad \forall x \in X$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 13.1.7: *Die kompakten Operatoren $K(X,Y)$ bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Aufgabe 4 (2+2+4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes C^1-Gebiet, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ und $q \in L^\infty(\Omega)$. Sei die Abbildung $L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)'$ schwach definert über

$$Lv = -\operatorname{div}(aDv) + qv.$$

Außerdem sei a symmetrisch und elliptisch mit $\mu > 0$, d.h. es gelte $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

1. L ist ein Isomorphismus, falls $q(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in \Omega$.
2. L ist Fredholmsch mit Index Null.

3. Für die Existenz einer schwachen Lösung von

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(aDv) &= f \text{ in } L^2 \\ Dv \cdot an &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

ist die Bedingung $\int_\Omega f = 0$ notwendig und hinreichend. Hier ist n das äußere Normalenvektorfeld an $\partial\Omega$ und $(an)_j = \sum_i a_{ij} n_i$ in lokalen Koordinaten.

(*Hinweis: die Einbettung* $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *ist für solche* Ω *kompakt nach dem Satz von Rellich, benutzen Sie dies als Black Box.*)
Es ist $v \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von obiger Differentialgleichung, falls gilt

$$\int_\Omega \langle Dv, aDu \rangle = fu, \qquad \text{für alle } u \in W^{1,2}(\Omega).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 9.7. vor der Vorlesung**.