Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2018, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 9.7.2018
BSc. M. Zeinhofer

Aufgabe 1 (*Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren*)
Betrachten Sie für $k \in L^2(I \times I)$, $I = (0,1)$, den Operator $K\colon L^2(I) \to L^2(I)$ mit $Kf(x) = \int_I k(x,y)f(y)\,dy$. Beweisen Sie:

(a) K ist wohldefiniert und stetig mit $\|K\| \le \|k\|_{L^2(I\times I)}$.

(b) Der Operator K^* (Hilbertraum-Adjungierte) hat eine entsprechende Integraldarstellung, und zwar mit $k^*(x,y) = k(y,x)$.

(c) K ist ein kompakter Operator (verwenden Sie, dass Linearkombinationen von Produktfunktionen $w(x,y) = u(x)v(y)$ dicht in $L^2(I \times I)$ sind, sowie Lemma 11.1.7).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das unendliche Gleichungssystem

$$x_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \quad (1 \le i < \infty)$$

für jedes $b \in l^2(\mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in l^2(\mathbb{R})$ besitzt, falls für jedes $N \in \mathbb{N}$ die $N \times N$ Matrix $(a_{k_ik_j})_{1\le i,j\le N}$ positiv semidefinit ist und $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes C^1-Gebiet, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ und $q \in L^\infty(\Omega)$. Sei $L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)'$ schwach definert über

$$Lv = -\mathrm{div}(aDv) + qv$$

mit der Neumann-Bedingung $Dv \cdot an = 0$ auf $\partial\Omega$. D.h., für $\xi \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\langle Lv, \xi\rangle = \int_\Omega \langle D\xi, aDu\rangle + \int_\Omega qv\xi.$$

Außerdem sei a symmetrisch und elliptisch mit $\mu > 0$, d.h. es gelte $a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \mu > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

1. L ist ein Isomorphismus, falls $q(x) \ge \lambda > 0$ für alle $x \in \Omega$.

2. L ist Fredholmsch mit Index Null.

3. Für die Existenz einer schwachen Lösung von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(aDv) &= f \text{ in } \Omega \\ Dv \cdot an &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

   ist die Bedingung $\int_\Omega f = 0$ notwendig und hinreichend.

Hierbei ist n das äußere Normalenvektorfeld an $\partial\Omega$ und $(an)_j = \sum_i a_{ij} n_i$ in lokalen Koordinaten. (*Hinweis: die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ist für solche Ω kompakt nach dem Satz von Rellich, benutzen Sie dies als black box.*)
($v \in W^{1,2}(\Omega)$ ist eine schwache Lösung von obiger Differentialgleichung, falls gilt

$$\int_\Omega \langle D\phi, aDv\rangle + qv\phi = \int f\phi, \qquad \text{für alle } \phi \in W^{1,2}(\Omega).$$

)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 16.7. vor der Vorlesung**.