Erinnerung
Eine Kurve $\gamma_1 \in C^0([a,b],M)$ heißt *homotop* zu $\gamma_0 \in C^0([a,b],M)$, wenn es eine stetige Abbildung $H \in C^0([0,1]\times[a,b],M)$ gibt, sodass

(H1) $H(0,\cdot) = \gamma_0$ und $H(1,\cdot) = \gamma_1$,

(H2) $H(t,a) = \gamma_0(a)$ und $H(t,b) = \gamma_0(b)$ für alle $t \in [0,1]$.

Die *Homotopie-Klasse* $[\gamma_0]$ von γ_0 ist die Menge aller zu γ_0 homotoper Kurven.

Aufgabe 1 (Kürzeste Verbindung in einer Homotpie-Klassen)
Sei (M,g) eine riemannsche Mannikfaltigkeit mit der Eigenschaft, dass die Bälle $B_r(p)$ relativ kompakt sind. Seien $p,q \in M$ und $\gamma_0 \in C^0([a,b],M)$. Zeigen Sie, dass es eine *kürzeste Kurve* $\gamma_* \in [\gamma_0]$ gibt. D.h. $\gamma_* \in [\gamma_0]$ und

$$L[\gamma_*] = \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} L[\gamma_0].$$

Hinweis: Zeigen Sie: Eine stetige Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ kann proportional zur Bogenlänge reparametrisiert werden (resultierende Kurve: $\hat{\gamma} : [a,b] \to M$), sodass $\hat{\gamma}$ zu γ homotop ist. Danach wie in der Vorlesung vorgehen.

Aufgabe 2 (Sobolev-Räume)
Sei $1 \le p \le \infty$. Für welche $\alpha \in (0,1)$ ist $u_\alpha(x) := |x|^\alpha$ in $W^{1,p}(B_1(0))$?

Abgabe der Lösungen: Vor der Übung in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten von Jan Metsch