Übungsaufgaben zur Geometrischen Analysis | SoSe 22, Serie 5
Ernst Kuwert, Jan Metsch | 14. Juni 2022

Bemerkung: Am 09.06 ist Feiertag und keine Übung. Daher ist Abgabe bis zur Übung am 23.06.

Zu Aufgabe 1:

1. Eine Form $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ heißt periodisch, wenn es $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gibt, sodass $\omega(x + \sum_{i=1}^n t_i m_i e_i) = \omega(x)$ für alle $t_1, ..., t_n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

2. Eine Form $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ heißt harmonisch, wenn $d\omega = 0$ und $d^*\omega = 0$ gilt.

Aufgabe 1 (Harmonische Formen auf dem Torus)
Zeigen Sie: Ist $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ eine periodische, harmonische Form, so ist ω konstant.

Aufgabe 2 (Gaffney's Ungleichung)
Gehen Sie den Beweis zu Gaffney's Ungleichung durch und machen Sie sich alle kritischen Stellen klar. Beispielsweise:

1. Konstruktion und Glattheit von A und B.

2. Verschlucken von $|\omega|^2$ in Schritt 2.

3. Wahl von ϵ und δ in Schritt 4.

4. Hochziehen auf M duch eine Zerlegung der 1.

Überlegen Sie sich Fragen, falls Sie einen Punkt nicht verstehen.

Aufgabe 3 (Gaffney's Ungleichung auf nicht kompakten Mannigfaltigkeiten)
Betrachten Sie 1-Formen $adx + bdy$ auf $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie:

(a) Es gelten $d\omega = (b_x - a_y)dx \wedge dy$ und $d^*\omega = -a_x - b_y$.

(b) $d\omega = 0$, $d^*\omega = 0$ liefern die Cauchy-Riemann Gleichungen für $f := a - ib$.

(c) Mit $z := x + iy$ gelten $|\omega(x, y)|^2 = |f(z)|^2$ und $|D\omega(x, y)|^2 = 2|f'(z)|^2$.

(d) Finden Sie eine in $L^2(D)$ beschränkte Folge ω_k, die $d\omega_k = 0$, $d^*\omega_k = 0$ und $\|D\omega_k\|_{L^2(D)} \to \infty$ erfüllt.

Abgabe der Lösungen: Vor der Übung in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten von Jan Metsch