Aufgabe 1 (Optimale Sobolev Konstanten)
Es sei $n \geq 3$, $p = 2^* = \frac{2n}{n-2}$ und $c_0 = c_0(n)$ die optimale Sobolev Konstante, d.h. die kleinste Konstante, sodass

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p d^n x \right)^{\frac{2}{p}} \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 d^n x$$

für alle $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Zeigen Sie für alle $v \in W^{1,2}(\mathbb{S}^n)$ die Ungleichung

$$\left(\int_{\mathbb{S}^n} |v(\omega)|^p d\mu_{\mathbb{S}^n} \right)^{\frac{2}{p}} \leq c_0 \left[\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla_{\mathbb{S}^n} v(\omega)|^2 d\mu_{\mathbb{S}^n} + \frac{n(n-2)}{4} \int_{\mathbb{S}^n} v(\omega)^2 d\mu_{\mathbb{S}^n} \right].$$

Bemerkung:
Sie haben (modulo selbe Rechnung rückwärts aufschreiben) nachgerechnet, dass die Soboelv Konstanten auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{S}^n$ gleich sind.

Abgabe der Lösungen: Vor der Übung in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten von Jan Metsch