Aufgabe 1 (Matrixwertige 1-Formen)
Sei a eine matrixwertige p-Form und b eine matrixwertige q-Form. Zeigen Sie:

(i) $[a,b] = a \wedge b - (-1)^{pq} b \wedge a$

(ii) $[b,a] = (-1)^{pq+1}[a,b]$

(iii) $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db$

(iv) $d([a,b]) = [da,b] + (-1)^p [a,db]$

Definition
Zwei Vektorbündel $\pi : V \to M$ und $\tilde{\pi} : \tilde{V} \to M$ heißen über id_M isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $f : V \to \tilde{V}$ gibt, sodass

(1) $\pi = \tilde{\pi} \circ f$

(2) Für alle $x \in M$ ist $f|_{V_x} : V_x \to \tilde{V}_x$ linear.

Aufgabe 2(Die Cozyklusbedingung)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $k \in \mathbb{N}$ und $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von M, sodass es für $\lambda, \mu \in \Lambda$ glatte Abbildungen $\varphi_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{C})$ gibt, die die Cozyklusbedingung erfüllen.

Zeigen Sie, dass es, bis auf Isomorphie, genau ein Vektorbündel $\pi : V \to M$ von Rang k mit Übergangsfunktionen $\varphi_{\lambda\mu}$ gibt.

Abgabe der Lösungen: Vor der Übung in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten von Jan Metsch