Aufgabe 1 (Sphärisches Maß)
Es sei X ein metrischer Raum, $0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$.

1. Für $A \subset X$ sei
$$\mathcal{S}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\rho_j^s \;\Big|\; A \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_{\rho_j}(x_j), 0 < \rho_j < \delta, x_j \in X\right\},$$
wobei $\alpha(s)$ wie in der Vorlesung definiert sei.

2. Das s-dimensionale sphärische Maß auf X ist für $A \subset X$ definiert durch
$$\mathcal{S}^s(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{S}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{S}^s_\delta(A).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen für das sphärische Maß:

1. $\mathcal{S}^s$ ist ein borelreguläres Maß.
2. $\mathcal{S}^0$ ist das Zählmaß.
3. Für das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^s$ gilt
$$\mathcal{H}^s \leq \mathcal{S}^s \leq 2^s \mathcal{H}^s.$$
4. Auf $\mathbb{R}^n$ gilt für alle $\delta > 0$
$$\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^n_\delta = \mathcal{L}^n.$$

Aufgabe 2
Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$. Zeigen Sie: Die Steinersymmetrisierung $S_\nu(A)$ von A bzgl. P_ν ist konvex.

Abgabe Mittwoch, 3. Mai 2023