Aufgabe 1
Sei μ Radonmaß auf dem lokal kompakten, separablen metrischen Raum X. Zeigen Sie dass $C^0_c(X)$ dicht in $L^p(\mu)$ ist für $1 \leq p < \infty$, aber (im allgemeinen) nicht dicht in $L^\infty(\mu)$.

Aufgabe 2
Sei $C \subset \mathbb{R}$ die Cantormenge: $C = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ wobei C_n die Menge aller $x \in [0,1]$ ist mit einer Darstellung $x = \sum_{j=1}^\infty a_j 3^{-j}$, $a_j = 0, 1, 2$ und $a_j = 0, 2$ für $j \leq n$. Betrachten Sie

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi_{C_n}(t)\, dt.$$

Zeigen Sie: f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, und f hat folgende Eigenschaften:

(a) f ist monoton,

(b) f ist surjektiv,

(c) $f' = 0$ auf $\mathbb{R}\backslash C$, insbesondere also $\mathcal{L}^1$-fast überall,

(d) Ist ν das Radonmaß mit $\nu((x,y]) = f(y) - f(x)$ (siehe Aufgabe 3, Serie 3), so gilt

$$\nu = \frac{2^s}{\alpha(s)} \mathcal{H}^s \llcorner C \quad \text{mit } s = \log_3 2.$$

Abgabe Mittwoch, 7. Mai 2023