Aufgabe 1 (Schwarzscher Stiefel)
Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$ mit Parametrisierung

$$f : [0,2\pi] \times [0,1] \to Z,\ f(\varphi, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z).$$

Um den Flächeninhalt von Z zu approximieren, betrachte Unterteilungspunkte $\varphi_k = \frac{2\pi k}{2m}$, $z_l = \frac{l}{2n}$, wobei $0 \le k \le 2m$, $0 \le l \le 2n$ und $k + l$ gerade. Erhalte eine Zerlegung von $[0,2\pi] \times [0,1]$ in Dreiecke mit Basis der Länge $\frac{2\pi}{m}$ auf den Strecken $z = \frac{l}{2n}$ und Höhe $\frac{1}{2n}$. Berechne die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Bilddreiecke und untersuche den Grenzwert für $m, n \to \infty$.

Aufgabe 2 (Satz von Gauß)
Betrachte für eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ das Funktional

$$\phi : C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ \phi(f) = \int_E \operatorname{div} f \, d\mathcal{L}^n.$$

E hat lokal endlichen Perimeter wenn gilt:

$$|\phi(f)| \le C(K)\, \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{für alle } f \in C^1_c(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{spt} f \subset K.$$

Zeigen Sie: es gibt ein Radonmaß μ_E und eine μ_E-messbare Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ so dass gilt

$$\int_E \operatorname{div} f \, d\mathcal{L}^n = \int \langle f, \eta \rangle \, d\mu_E.$$

Bestimmen Sie μ_E und η wenn E ein C^1-Gebiet ist.

Abgabe Mittwoch, 12. Juni 2023