Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS22, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 17.10.2022
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Fundamentallösung*) (4 Punkte)

Die *Fundamentallösung* der Laplacegleichung ist definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- Φ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, d.h., $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Es gilt
$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS = 1 \text{ für alle } r > 0.$$
- Es gilt $\Phi \in L^1(B_r(0))$ und $\nabla\Phi \in L^1(B_r(0))$ für alle $r > 0$, aber $\nabla^2\Phi \notin L^1(B_r(0))$.
- Es gilt
$$\int_{B_r} |\Phi| dx \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_r} |\Phi| dS \to 0 \quad \text{für} \quad r \to 0.$$

Aufgabe 2 (*Transformation*) (4 Punkte)

Es seien B eine reelle $(n \times n)$-Matrix, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx + c$, und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q$$

gilt, wobei $L_0 := -\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ ist und die a_{ik} die Elemente der Matrix $A := BB^t$ sind. Insbesondere ist also $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist. Es folgt in diesem Fall: falls u harmonisch ist, ist $u \circ Q$ auch harmonisch.

Aufgabe 3 (*Harmonische Funktionen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Weiter sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine harmonische Funktion mit den Randwerten $u(x, y) = 1 + 3y^2$ auf $\partial\Omega$. Geben Sie, ohne u explizit zu berechnen, den maximalen Wert von u in $\bar{\Omega}$ und den Funktionswert $u(0)$ an.

Aufgabe 4 (*diskrete harmonische Funktion*) (4 Punkte)

Eine Funktion $u : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ heißt *(diskrete) harmonische Funktion*, falls gilt

$$u(i,j) = \frac{1}{4}\{u(i-1,j) + u(i+1,j) + u(i,j-1) + u(i,j+1)\}, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

(die Mittelwerteigenschaft). Angemmoen, dass u an (0,0) ihres Maximum annimmt. Sie zeigen, dass u konstant ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 24.11, 12:15 Uhr