Aufgabe 1 (*radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)

Sie zeigen: alle radialsymmetrische Lösungen u von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

haben folgende Form

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - ct) + G(|x| + ct)}{|x|}.$$

Aufgabe 2 (*Invarianz unter der Lorentz-Transformation*) (4 Punkte)

Sei a eine Konstante mit $|a| < 1$. Sie zeigen, dass die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

ist erhalten, unter der *Lorentz-Transformation*

$$\begin{cases} s &= \dfrac{t - a x_1}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_1 &= \dfrac{x_1 - at}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_i &= x_i, \qquad \text{für } i = 2, 3. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Regularitätsanforderungen*) (4 Punkte)

Man beweise, dass die Regularitätsanforderungen an die Anfangsdaten für die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

im Allgemeinen notwendig sind. Das bedeutet, dass $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ im Allgemeinen notwendig ist, um $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ zu erhalten.

Hinweis. Man betrachte $\varphi = 0$ und ein konkretes radialsymmetrisches $\psi \in C^1$ mit $\psi_{B_1(0)} = 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $t \mapsto \Delta u(t,0)$ im Allgemeinen nicht für alle Zeiten stetig ist.

Aufgabe 4 (*eine alternative Lösungsmethode*) (4 Punkte)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sei weiter $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,t) &= \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,t) &= \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

(a) Für beliebiges $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ definiere ein Vektorfeld ($x \in B_{t_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$) durch

$$V(x) := \left(\frac{Du(x,t)}{|x-x_0|} + u(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^3} + u_t(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2} \right)\Big|_{t=t_0-|x-x_0|}.$$

Sie zeigen, dass

$$\operatorname{div} V = 0.$$

(b) Sie leiten eine Formel für $u(x_0, t_0)$ bzgl. φ und ψ durch Integrieren von $\operatorname{div} V$ in $B_{t_0}(x_0)\backslash B_\epsilon(x_0)$ mit $\epsilon \to 0$.

Diese ist eine alternative Lösungsmethode.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 16.01.2023, 12:15 Uhr

Frohe Weihnachten und guten rutsch ins neue Jahr 2023!