Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 16.1.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)

Sei u eine Lösungen von $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}$. u heißt *verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen* von der Wellengleichung, falls u folgende Form

$$u(x,t) = \alpha(r)\phi(t - \beta(r))$$

hat, für $\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \beta : (0,\infty) \to [0,\infty)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\beta(0) = 0$. Hierbei $r = |x|$.
Sie zeigen: Solche verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen existiert nur für $n = 1$ or $n = 3$. Weiter finden Sie die Form von α, β.

Aufgabe 2 (*Abschätzung*) (4 Punkte)

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkt Funktion mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$. Für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ definiert

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\psi(x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

Sie zeigen: für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\sup_{B_{\alpha t}(0)} |u(\cdot,t)| \leq \frac{C}{t} \sup_{\mathbb{R}^2} |\psi| \qquad \text{für alle } t > 1,$$

wobei C eine positive Konstante, die nur von α abhängt.

Aufgabe 3 (*Abstiegsmethode*) ($4 + 4^*$ Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$ und $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = \lambda^2 u \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie die Funktion $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x, x_{n+1}, t) = \{A\cos(\lambda x_{n+1}) + B\sin(\lambda x_{n+1})\}u(x,t).$$

Sie herleiten die Gleichung für v.

b) Sei $\lambda > 0$ und $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= \lambda^2 u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

c) Sei $\lambda > 0$ und $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= -\lambda^2 u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (*Wellengleichung* $n = 2$) (4 Punkte)

Sie lösen das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= |x|^2, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= 1, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 23.01.2023, 12:15 Uhr