
Aufgabe 1 (*Separationsansatz*) (4 Punkte)

Mit der Trennungsmethode betrachten Sie das Problem: Sei $L > 0$, $k > 0$ und $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + u = 0 & \text{für } x \in (0, L), t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & \text{für } x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0, & \text{für } t > 0 \\ -u_t(L, t) = u(L, t), & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Ansatz: $u(x, t) = v(x)w(t)$. Sie finden die Gleichungen, und sowie die Randbedingungen für v und w . Sie lösen erst die Gleichung für v für geeignete λ_k , dann die Gleichung für w für dieselbe λ_k .

Aufgabe 2 (*Lemma 12.4*) (4 Punkte)

Sie zeigen Lemma 12.4.

Lemma 12.4. Sei $u \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}^n$, and $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\widehat{u(\cdot - a)} = e^{-i\xi \cdot a} \hat{u}(\xi),$$

und

$$\widehat{u(k \cdot)}(\xi) = \frac{1}{|k|^n} \hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right)$$

Aufgabe 3 (*Fouriertransformation*) (2 Punkte)

Sie berechnen die Fouriertransformierte von $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = e^{|t|}.$$

Aufgabe 4 (*Fouriertransformation und Wellengleichung*) (4 + 2* Punkte)

Betrachte das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0, x) = \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Seien $\psi \in \mathcal{S}$ (\mathcal{S} ist die Schwartzsche Klasse) und u eine $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung mit $u(t, \cdot), u_t(t, \cdot), u_{tt}(t, \cdot) \in \mathcal{S}$. Sei $\hat{u}(\xi)$ die Fouriertransformierte von u .

(a) Sie zeigen, dass \hat{u} die Gleichung (für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$)

$$\hat{u}_{tt}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad \hat{u}_t(t, \xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

erfüllt und lösen Sie die Gleichung .

(b) Sei nun $n = 3$. Sie zeigen

$$\frac{\sin |\xi|t}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} e^{it\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta)$$

(Hinweis. Erstens zeigen Sie $\int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta) = \int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, T\xi \rangle} dS(\eta)$ für alle $T \in O(3)$ (d.h., $T^t = T^{-1}$). Zweitens wählen Sie ein $T \in O(3)$ mit $T\xi = |\xi|(0, 0, 1)$.)

(c) Mit der umgekehrten Fouriertransformation finden Sie u von \hat{u} . ($n = 3$)

(Hinweis. Benutzen Sie (b).)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 30.01.2023, 12:15 Uhr