Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 14
Prof. Dr. G. Wang — 30.1.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Seperationsansatz*) (2 Punkte)

Mit der Trennungsmethode finden Sie eine nicht-triviale Lösung (d.h. u nicht konstant ist) von der nicht-linearen PDG:

$$u_{x_1}^2 u_{x_1x_1} + 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2x_2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 (*wandernde Wellen-Lösung, traveling wave solution*) (4 Punkte)

Sie finden explizite Formeln für v und σ, so dass $u(x,t) := v(\xi - \sigma t)$ eine wandernde Wellen-Lösung der nicht-linearen Diffusion-Gleichung

$$u_t - u_{xx} = f(u),$$

wobei

$$f(z) = -2z^3 + 3z^2 - z.$$

Angenommen: $\lim_{s\to+\infty} v = 1, \lim_{s\to-\infty} v = 0, \lim_{s\to\pm\infty} v' = 0.$

Hinweis: Um σ zu bestimmen multiplizieren Sie $v'' + \sigma v' + f(v) = 0$ mit v' und integrieren.

Aufgabe 3 (*explizite Lösungen*) (3 + 3 Punkte)

a) Sie finden eine Lösung von

$$-\Delta u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \quad \text{in } B_1(0)$$

mit folgender Form $u = \alpha(1 - |x|^2)^{-\beta}$.

b) Sie finden eine Lösung von

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0,$$

mit folgender Form

$$u(x,t) = t^\alpha v(xt^{-\beta}),$$

wobei $\frac{n-2}{n} < \gamma < 1$. Die Lösung soll gegen 0 konvergieren als $|x| \to \infty$.

Aufgabe 4 (*Transformation*) (4 Punkte)

Sie finden eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(z, p_1, p_2)$, so dass falls u eine Lösung von

$$u_{xt} = 0$$

ist, ist $w := f(u, u_x, u_t)$ eine Lösung von der Liouville-Gleichung

$$w_{xt} = e^w.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass f die Form $f(z, p_1, p_2) = a(z) + b(p_1) + c(p_2)$ haben muss.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 06.02.2023, 12:15 Uhr