Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 31.10.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Harnacksche Ungleichung und Liouvillesch Satz*) (4 Punkte)

1. Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.

2. Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

Aufgabe 2 (*Greensche Funktion für den Halbraum*) (4 Punkte)

Sei $\Omega := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ der obere Halbraum und Γ die Grundlösung aus der Vorlesung zur Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\mathbb{R} \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \tilde{x} := (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die Spiegelung an der Ebene $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$G : \overline{\Omega} \times \Omega \backslash \{(z,z) : z \in \Omega\} \to \mathbb{R}, \quad G(y,x) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

eine Greensche Funktion der Laplace-Gleichung in Ω ist.

b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi, \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Benützen Sie Ergebnisse der Vorlesung, ohne deren Gültigkeit für unbeschränkte Gebiete zu prüfen.

Aufgabe 3 *(C^2-subharmonische Funktionen)* (4 Punkte)

a) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe C^2-Funktion und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sie zeigen, dass $\phi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.
b) Sie zeigen, dass $u(x) = \log|x| : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

Aufgabe 4 *(inneren Kugelbedingung und äußere Kugelbedingung)* (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2 glattem Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Hinweis. Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass der Rand von Ω in einer Umgebung von x_0 als Graph einer C^2-Funktion darstellen lässt. ($\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in U, x_n = f(x')\}$ für $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$). Dann können Sie eine kleine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$ finden.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 31.10, 12:15 Uhr