Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 07.11.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Konvergenzsatz*) (4 Punkte)

Sie zeigen Theorem 4.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert. Dann ist u in Ω harmonisch.*
(Hinweis. MWS und ein Satz aus Analysis I über gleichmäße Konvergenz)

Aufgabe 2 (*C^0-subharmonische Funktionen*) (4 Punkte)

Sie zeigen Lemma 4.12: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \dots, u_N$ in Ω subharmonisch. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

in Ω subharmonisch.
Sie zeigen auch:

$$\log_+ |x| = \begin{cases} \log |x|, & \text{falls } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \leq 1 \end{cases}$$

ist eine C^0-subharmonische Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (*Äßeres Dirichlet-Problem*) (6+2 Punkte)

a) Sei $n \geq 3$. Lösen Sie das Dirichletproblem für die Komplement der Kugel ($\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \geq R\}$)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = \varphi \in C^0(\partial B_R) \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = const. \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis. Betrachte die Kelvintransformation $k : B_R \backslash \{0\} \to \Omega$

$$k(x) = \frac{R^2}{|x|^2} x \quad \textit{und} \quad v(x) = |x|^{2-n} u(k(x)).$$

Zunächst zeigen Sie, dass u in Ω harmonisch genau dann ist, wenn v in $B_R \backslash \{0\}$ harmonisch ist.
Dann zeigen Sie mit dem Hebbarkeitssatz (Satz 3.16), dass u eine Lösung von (1) genau dann ist, wenn v eine Lösung von

$$\begin{cases} v \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R}) \\ -\Delta v = 0 \textit{ in } B_R \\ v = R^{2-n}\varphi \in C^0(\partial B_R) \textit{ auf } \partial B_R \end{cases} \tag{2}$$

ist. Danach wenden Sie die Lösungsformel für (2) (Theorem 3.13) an und finden Sie die Lösungsformel für (1).

b) Sei $n \geq 3$. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R}) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \backslash B_R})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R}, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial B_R. \end{cases}$$

Sie zeigen, dass $u = 0$, falls

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

gilt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 14.11, 12:15 Uhr