Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 14.11.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Maximumsprinzip*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\Delta u = u^3, \text{ in } \Omega, \quad u = 0, \text{ auf } \partial\Omega.$$

Sie zeigen, dass $u = 0$ in Ω.

Aufgabe 2 (*Gradientenabschätzung*) (4 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion in $\overline{B}_R$ und sei $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B}_R)$ eine Lösung von

$$\Delta u = f \quad \text{ in } B_R.$$

Sie zeigen

$$|Du(0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\partial B_R} |u| + \frac{R}{2} \max_{B_R} |f|.$$

Hinweis. In $B_R^+ := \{x = (x', x_n) \in B_R : x_n > 0\}$ *setze*

$$v(x', x_n) = \frac{1}{2}(u(x', x_n) - u(x', -x_n)).$$

Betrachten Sie eine Funktion

$$w(x', x_n) = A|x'|^2 + Bx_n + Cx_n^2.$$

Mit dem Vergleichsprinzip schätzen Sie v *durch* w *mit passender* A*,* B *und* C *und leiten Sie eine Abschätzung von* $v_{x_n}(0)$ *her.*

Aufgabe 3 (*Maximumprinzip und Abschätzung*) (4 Punkte)

Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) = 0$ in Ω. Sei der Operator L gleichmäßig elliptisch und $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2 \cdots, n)$.

(a) Setze $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$. Zeigen Sie $-Lv \leq 0$ in Ω für hinreichend größ $\lambda > 0$.

(b) Sie zeigen

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).$$

Aufgabe 4 (*Maximumprinzip ohne der Bedingung $c \leq 0$*) (4 Punkte)
$u \in C^2(\Omega)$ sei eine Unterlösung eines linearen strikt elliptischen Differentialoperators $L = \sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i\partial_i u + cu$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend,

$$-Lu \leq 0$$

in Ω mit $|a_{ij}|, |b_i|, |c| \leq \Lambda$, für den ein v mit $v > 0$,

$$-Lv \geq 0$$

in Ω existiert.

1. Zeigen Sie, dass $w := u/v$ kein positives Maximum in Ω annehmen kann, außer wenn w konstant ist.

   (*Hinweis: Zeigen Sie* $-\big\{ \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}w + \sum_i (2a_{ij}v^{-1}\partial_j v + b_i)\partial_i w \big\} \leq 0$ *auf* $D := \{w > 0\}$.)

2. Falls $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ zusätzlich gilt, gilt $u \leq 0$ in Ω.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 21.11, 12:15 Uhr