Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 21.11.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Die Wärmeleitungsgleichung*) (8 Punkte)

(a) Ist u glatt und löst die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Sie zeigen, dass für alle $\lambda > 0$ $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ auch eine Lösung ist. Weiter benutzen Sie diese Eigenschaft zu zeigen, dass $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ auch eine Lösung ist.

(b) Sie prüfen nach, dass $\gamma(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

(c) Sei $\alpha > 0$. Man zeige, dass

$$G(t,x) = \frac{1}{(1-4\alpha t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\alpha |x|^2}{1-4\alpha t}}$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t < 1/4\alpha$.

(d) Sie zeigen, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t)dx = 1, \quad \forall t > 0$

Aufgabe 2 (*Transformation*) (2 Punkte)

Wir betrachten

$$w_t = \alpha w_{xx} + \beta w_x + \gamma w, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Hier sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Finden Sie geeignete Konstante $\lambda, a \in \mathbb{R}$ derart, so dass $u(t,x) := e^{\lambda t/\alpha} e^{-ax} w(x, \frac{t}{\alpha})$ die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

erfüllt.

Aufgabe 3 (*eindimentionale Wärmeleitungsgleichung*) (4 Punkte)

Sei $n = 1$ und $u(t,x) = v(\frac{x^2}{t})$.

(a) Man zeige, dass $u_t = u_{xx}$ genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0. \tag{1}$$

(b) Man zeige, dass die allgemaine Lösung von (1)

$$v(z) = c_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + c_2$$

lautet.

(c) Man leite $v(\frac{x^2}{t})$ bzgl. x ab und man wähle eine besondere c_1 so, dass man eindimensionale Fundamenatallösung bekommt.

Aufgabe 4 (Energie-Methode, Eindeutigkeit) (2 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $F(t) := \int_\Omega u(x,t)^2 dx$ gilt $F'(t) \leq 0$ für alle $t \in (0,T)$. Als Anwendung zeigen Sie, dass $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}_T$, falls zusätzlich $u = 0$ auf $\Omega \times \{0\}$ gilt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 28.11, 12:15 Uhr