Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 28.11.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Unterlösung*) (4 Punkte)

Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Sie zeigen

a) Ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion, dann ist $v := \phi \circ u$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung, *d.h.* $v_t - \Delta v \leq 0$ in Ω_T.

b) Ist zusätzlich $u \in C^{3,2}(\Omega_T)$. Dann ist $w = |Du|^2 + u_t^2$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe 2 (*Spiegelung*) (4 Punkte)

Sei $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ stetig und beschränkt mit $\phi(0) = 0$. Finden Sie eine Darstellungsformel für die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && \text{für } x > 0, t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), && \text{für } x > 0, \\ u(x,t) &= 0, && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis. Sie setzen ϕ auf $\mathbb{R}^1$ fort und benutzen Satz 6.6 und (6.6). Weiter zeigen Sie, dass die so gefundene Darstellung eine Lösung des Problems ist.

Aufgabe 3 (*Eindeutigkeit*) (2 + 2 + 4 Punkte)

a)(*Gronwallsche Ungleichung.*) Sei $I = [a, b)$ und erfülle $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$w'(t) \leq \beta(t)w(t) + \alpha(t), \quad \forall t \in I,$$

so folgt für $t \in I$

$$w(t) \leq w(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds)} + \int_a^t \alpha(r)e^{\int_r^t \beta(s)ds}dr.$$

Insbesondere, $w(t) \leq 0$ für $t \in I$, falls $\alpha = 0$ und $w(a) = 0$.

b) Sei B das Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^0([0, \infty))$. Betrachte folgendes Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)(u - \frac{|x|^2}{2n}) - 1, \text{ in } B \times [0,\infty), \\ u(\cdot,t)_{|\partial B} = \frac{1}{2n}, \forall t \geq 0 \\ u(\cdot,0) = \frac{1}{2n}, \\ u \in C^2(B \times (0,\infty)) \cap C^0(\overline{B \times (0,\infty)}). \end{cases}$$

Sie zeigen,

b1) dass das Problem höchstens eine Lösung hat,

b2) die Lösung (wenn existiert) non-negative ist und die Abschätzung

$$0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{2n} \exp\{\int_0^t f(s)ds\} + \frac{|x|^2}{2n} \tag{1}$$

besitzt. Weiter gilt $u(x,t) \leq 1/n$, falls $f \leq 0$.

Hinweis. Sie benutzen Aufgabe a) zweimal. 1. Für Eindeutigkeit betrachten Sie $w(t) = \int_B v^2(t,x)dx$, wobei $v = u_1 - u_2$, und zeigen Sie, dass w eine Differentialungleichung erfüllt und somit Sie a) benutzen können. 2. Für (1) betrachten Sie $u - \frac{|x|^2}{2n}$.

————

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 05.12, 12:15 Uhr