Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 05.12.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Wärmeleitungsgleichung mit gemischten Randbedingungen*) (4 + 4* Punkte)

a) (homogene Wärmeleitungsgleichung) Bitte lösen Sie das Problem:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u_x(0,t) &= 0, \quad \forall t>0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x\in(0,\infty) \end{aligned}$$

wobei $\phi \in C_b^0((0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$ mit $\phi(0)=0$. (*Hinweis. eine passende Spiegelung*)

b) (inhomogene Wärmeleitungsgleichung) Bitte lösen Sie das Problem:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u_x(0,t) &= h(t), \quad \forall t>0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad x\in(0,\infty) \end{aligned}$$

wobei $h \in C^1((0,\infty)) \cap C([0,\infty))$ und $\phi \in C_b^0((0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$ mit $\phi_x(0) = h(0)$. (*Hinweis. Erste reduzieren Sie das Problem zu einem Problem mit inhomogener Wärmeleitungsgleichung. Dann benutzen die Spiegelungsmethode*)

Aufgabe 2(Das Maximumprinzip) (4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Sei $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $u \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Man zeige:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi, \qquad \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Hinweis: Man wähle $M>0$, so dass $\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n}(u+M)>0$. Anschließen wende man den Operator der Wärmeleitungsgleichung auf die Funktion $e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M)$ an und beweise

$$\sup{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M) = \sup_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}(\varphi+M).$$

Man beachte hierbei, dass die Funktionen $e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M)$ ihr Maximum in $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ annehmen. Schließlich fixiere man $0<R<\infty$ und führe den Grenzübergang $a\to 0$ auf $[0,R)\times B_R(0)$ durch.

Aufgabe 3 (Das Maximumprinzip) (4 Punkte)
Sie zeigen Korollar 7.12: *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung*

$$\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u &=& 0, & \textit{in } \Omega_T \\ u &=& 0, & \textit{auf } \partial\Omega \times [0,T] \\ u &=& \varphi, & \textit{auf } \Omega \times \{t=0\} \end{array}$$

mit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, aber $\varphi \not\equiv 0$. Dann folgt, dass $u > 0$ in Ω_T.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien ein beschränktes reguläres Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ und eine Lösung $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega_T})$, des Problems:

$$\begin{cases} u_t &=& \Delta u, & \text{in } \Omega_T, \\ u &=& 0, & \text{auf } (0,T] \times \partial\Omega_T, \\ u(0,x) &=& \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Es sei auch $u_t \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_{t,x_i}(\cdot,t) \in C^0(\overline{\Omega})$. Man definiere die thermische Energie des Körpers Ω zur Zeit t:

$$E(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$ gilt:

$$E(t) \leq [E(t_1)]^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} [E(t_2)]^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} \tag{1}$$

Die Eigenschaft von (1) heißt die log*-Konvexität der Funktion E. Hinweis: Man studiere $E'(t)$ und $E''(t)$ und zeige*

$$E''(t) = 4 \int_\Omega (u_t)^2 dx$$

Man benutze die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen:

$$(E'(t))^2 \leq E(t)E''(t).$$

Man nehme erste $E(t) > 0$ an; dann betrachte $f(t) := \log E(t)$ und zeige die Konvexität dieser Funktion f, a.h. $f'' \geq 0$. Dann benutze die äquivalente Aussage der Konvexität

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau) f(t_1) + \tau f(t).$$

I.a. betrachten Sie $\log(E(t) + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 12.12, 12:15 Uhr