Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 22/23, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 12.12.2022
Ph. D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Unterlösung und konvexe Funktion*) (4 Punkte)

Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Seien $u_j \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ Lösungen von

$$\partial_t u_j - \Delta u_j = 0 \text{ in } \Omega_t$$

für $j = 1, 2, \cdots, m$. Sei f eine konvexe Funktion in $\mathbb{R}^m$. Sie zeigen

$$\sup_{\Omega_T} f(u_1, u_2, \cdots, u_m) \leq \sup_{\partial_p \Omega_T} f(u_1, u_2, \cdots, u_m).$$

Aufgabe 2 (*Abschätzung*) (4 Punkte)

Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$ $c \leq c_0$ eine stetige Funktion in Ω_T für ein nicht-negative Konstante c_0, und φ stetig in Ω mit $\varphi \geq 0$. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu &= -u^2 && \text{in } \Omega_T \\ u(\cdot, 0) &= \varphi && \text{auf } \Omega, \\ u &= 0, && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Sei zeigen

$$0 \leq u \leq e^{c_0 T} \sup_{\Omega} \varphi, \quad \text{in } \Omega \times (0, T].$$

Aufgabe 3 (*Abschätzung*) (4 Punkte)

Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $\varphi, f, g \in C(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= e^{-u} - f && \text{in } \Omega_T \\ u(\cdot, 0) &= \varphi && \text{auf } \Omega, \\ u &= g, && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Sei zeigen

$$-M \leq u \leq Te^M + M \quad \text{in } \Omega \times (0, T],$$

wobei

$$M = T \sup_{\Omega} |f| + \max\{\sup_{\Omega} |\varphi|, \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |g|\}.$$

Aufgabe 4 (*Gradienten Äbschätzung*) (4 Punkte)

Sei u_0 eine beschränkte stetige Funktion in $\mathbb{R}^n$. Ist $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Weiter seien u und ∇u in $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ beschränkt. Sie zeigen

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\cdot,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|$$

Hinweis. Mit $|u_0| \leq M$ *betrachten Sie*

$$w = u^2 + 2t|\nabla u|^2 - M^2.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 19.12, 12:15 Uhr