Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 08.05.2023
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Raumkurve*)
Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ verschiedene, nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven mit nirgends verschwindenden Krümmungen und Torsionen. Man sagt, c und $\tilde{c}$ bilden ein *Bertrandsches Kurvenpaar*, falls gilt

$$c(t) + \mathbb{R} n_c(t) = \tilde{c}(t) + \mathbb{R} n_{\tilde{c}}(t) \quad \text{für alle } t \in I, \tag{1}$$

wobei n_c (bzw. $n_{\tilde{c}}$) der Normalvektor von c (bzw. $\tilde{c}$) ist.
Seien c und $\tilde{c}$ ein Bertrandsches Kurvenpaar. Zeigen Sie:
a) $\tilde{c} = c + r n_c$, wobei r konstant ist.
b) Der Winkel, der von c' und $\tilde{c}'$ eingeschlossen wird, ist konstant.
c) Sowohl c als auch $\tilde{c}$ haben eine konstante Krümmung und eine konstante Torsion.

a) Sei $t \in I$ beliebig, aber fest. Die Bedingung (1) impliziert, dass die parametrisierte Gerade

$$\mathbb{R} \ni r_1 \mapsto c(t) + r_1 n_c(t),$$

welche Ortsvektor $c(t)$ und Richtungsvektor $n_c(t)$ besitzt, mit der parametrisierten Gerade

$$\mathbb{R} \ni r_2 \mapsto \tilde{c}(t) + r_2 n_{\tilde{c}}(t),$$

welche Ortsvektor $\tilde{c}(t)$ und Richtungsvektor $n_{\tilde{c}}(t)$ besitzt, übereinstimmt.

$\Rightarrow$ Die Richtungsvektoren $n_c(t)$ und $n_{\tilde{c}}(t)$ der beiden parametrisierten Geraden müssen Vielfache voneinander sein
$\Rightarrow$ Da $\left|n_c(t)\right| = \left|n_{\tilde{c}}(t)\right| = 1$ folgt somit $n_c(t) = \pm n_{\tilde{c}}(t)$ (2)
$\overset{(1)}{\Rightarrow} \exists\, r_1(t), r_2(t) \in \mathbb{R} : c(t) + r_1(t) n_c(t) = \tilde{c}(t) + r_2(t)\big(\pm n_c(t)\big)$
(Dabei soll die Notation $r_1(t), r_2(t)$ betonen, dass diese reellen Zahlen vom betrachten Zeitpunkt t abhängen)
$\Rightarrow \tilde{c}(t) = c(t) + \big(r_1(t) \mp r_2(t)\big) n_c(t) \;\forall t \in I$
$\Rightarrow$ Mit $r(t) \coloneqq r_1(t) \mp r_2(t)$ gilt : $\tilde{c}(t) = c(t) + r(t) n_c(t) \;\forall t \in I$ (3)

Nun ist die Konstanz von $r(t)$ in I nachzuweisen: Es gilt $\forall t \in I$, dass

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} r(t) n_c(t) = \tilde{c}(t) - c(t)$$
$$\Rightarrow r(t) = r(t)\big\langle n_c(t), n_c(t)\big\rangle = r(t)\big\langle \tilde{c}(t) - c(t), n_c(t)\big\rangle.$$

Daraus erhalten wir mit der Produktregel $\forall t \in I$, dass

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow r'(t) = \big\langle \tilde{c}'(t) - c'(t), n_c(t) \big\rangle + \big\langle \tilde{c}(t) - c(t), n_c'(t) \big\rangle \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} r'(t) = \big\langle \tilde{c}'(t), n_c(t) \big\rangle + \big\langle c'(t), n_c(t) \big\rangle + r(t) \big\langle n_c(t), n_c'(t) \big\rangle \\
&\overset{(2)}{\Rightarrow} r'(t) = \pm \big\langle \tilde{c}'(t), n_{\tilde{c}}(t) \big\rangle + \big\langle c'(t), n_c(t) \big\rangle + r(t) \big\langle n_c(t), n_c'(t) \big\rangle = 0,
\end{aligned}$$

da die Geschwindigkeits- zu den Normalenvektoren orthogonal sind und das Normalenfeld n_c normiert ist, was $\big\langle n_c, n_c' \big\rangle = 0$ impliziert.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow r(t) = r \quad \forall t \in I \quad \text{für eine Konstante } r \in \mathbb{R} \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} \tilde{c}(t) = c(t) + r n_c(t) \quad \forall t \in I \quad \text{für eine Konstante } r \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Für beliebiges, aber festes $t \in I$ sei $\theta(t)$ der Winkel, der von $c'(t)$ und $\tilde{c}'(t)$ eingeschlossen wird. Nach Definition des eingeschlossenen Winkels gilt also

$$\cos\big(\theta(t)\big) = \frac{\big\langle c'(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle}{\big|c'(t)\big|\big|\tilde{c}'(t)\big|} \quad \forall t \in I.$$

Da c und $\tilde{c}$ nach Bogenlänge parametrisiert sind, ist

$$\cos\big(\theta(t)\big) = \big\langle c'(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle \quad \forall t \in I.$$

Ableiten dieser Identität ergibt mit der Produktregel (1. Umformung), der Definition der Krümmung einer Raumkurve (2. Umformung), der Gleichung (2) (3. Umformung) und der Orthogonalität von Geschwindigkeits- und Normalenvektor (4. Umformung):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \cos\big(\theta(t)\big) &= \big\langle c''(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle + \big\langle c'(t), \tilde{c}''(t) \big\rangle \\
&= \kappa(t) \big\langle n_c(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle + \tilde{\kappa}(t) \big\langle c'(t), n_{\tilde{c}}(t) \big\rangle \\
&= \pm \kappa(t) \big\langle n_{\tilde{c}}(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle + \pm \tilde{\kappa}(t) \big\langle c'(t), n_c(t) \big\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \cos\big(\theta(t)\big) = w \quad \forall t \in I \quad \text{für eine Konstante } w \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \theta(t) = \arccos(w) \text{ ist konstant } \forall t \in I.
\end{aligned}$$

c) Zur Konstanz der Krümmungen: Es gilt $\forall t \in I$, dass

$$\begin{aligned}
w &\overset{b)}{=} \cos\big(\theta(t)\big) = \big\langle c'(t), \tilde{c}'(t) \big\rangle \\
&\overset{a)}{=} \big\langle c'(t), c'(t) + r n_c'(t) \big\rangle \\
&= 1 + r \big\langle c'(t), n_c'(t) \big\rangle \\
&= 1 + r \big\langle c'(t), -\kappa(t) c'(t) + \tau(t) b(t) \big\rangle \\
&= 1 - r\kappa(t). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir zur Umformung von n_c' die Frénet-Gleichungen für Raumkurven verwendet und im letzten Schritt die Orthogonalität von c' zum Binormalenvektor b ausgenutzt.
Umformung von (4) nach $\kappa(t)$ und die Konstanz von w und r implizieren nun

$$\kappa(t) = \frac{1-w}{r} \quad \forall t \in I \tag{5}$$

ist konstant. Eine analoge Argumentation liefert die Konstanz der Krümmung von $\tilde{c}$.

Zur Konstanz der Torsionen: Es gilt $\forall t \in I$, dass

$$\begin{aligned}
&\overset{a)}{\Rightarrow} \tilde{c}'(t) = c'(t) + rn_c'(t)\\
&\Rightarrow \left|\tilde{c}'(t)\right|^2 = \left|c'(t)\right|^2 + 2r\left\langle c'(t), n_c'(t)\right\rangle + r^2\left|n_c'(t)\right|^2\\
&\Rightarrow 1 = 1 + 2r\left\langle c'(t), n_c'(t)\right\rangle + r^2\left|n_c'(t)\right|^2\\
&\Rightarrow 0 = 2r\left\langle c'(t), -\kappa(t)c'(t) + \tau(t)b(t)\right\rangle + r^2\left|-\kappa(t)c'(t) + \tau(t)b(t)\right|^2\\
&\Rightarrow 0 = -2r\kappa(t) + r^2\left(\kappa(t)^2 + \tau(t)^2\right)\\
&\Rightarrow 0 = 2(w-1) + (1-w)^2 + r^2\tau(t)^2. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Frénet-Gleichungen für n_c' verwendet und im vorletzten Schritt die Orthogonalität von c' und b. Der letzte Schritt basiert auf (5). Durch die Gleichung (6) und die Konstanz von w und r folgt nun die Konstanz der Torsion τ auf I. Analoges Argument liefert auch die Konstanz der Torsion von $\tilde{c}$.

Aufgabe 2 (*Sphäre*)
Für die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ können wir zwei lokale Parametrisierungen $(U_N = \mathbb{R}^2, F_N, V_N = \mathbb{R}^3)$ und $(U_S = \mathbb{R}^2, F_S, V_S = \mathbb{R}^3)$ angeben, indem wir die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1,0,0)$ und p_S vom Südpol $S = (-1,0,0)$ mit Radius 1 verwenden. Dann gilt $\mathbb{S}^2 = F_N(U_N) \cup F_S(U_S)$.
In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch

$$p_N(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_1, x_2); \quad p_S(x) = \frac{1}{1+x_0}(x_1, x_2).$$

Berechnen Sie F_N, F_S, und $F_N^{-1} \circ F_S : F_S^{-1}(V_N \cap V_S) \to F_N^{-1}(V_N \cap V_S)$.

F_N ist die Umkehrabbildung von $p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, das heißt

$$F_N = p_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}.$$

Wir bestimmen nun die Abbildungsvorschrift von F_N. Für festes, aber beliebiges $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei also

$$F_N(x_1, x_2) = (y_0, y_1, y_2)$$

für $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Nun gilt

$$(x_1, x_2) = \big(p_N \circ p_N^{-1}\big)(x_1, x_2) = \big(p_N \circ F_N\big)(x_1, x_2) = p_N(y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{1 - y_0}(y_1, y_2),$$

wobei die letzte Umformung auf der Definition von p_N basiert. Vergleich der Komponenten liefert

$$y_1 = (1 - y_0)x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = (1 - y_0)x_2. \tag{7}$$

Für die Bestimmung von y_0 verwenden wir, dass $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, das heißt insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
&y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ &y_0^2 + (1 - y_0)^2 x_1^2 + (1 - y_0)^2 x_2^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ &(1 - y_0)^2 (x_1^2 + x_2^2) = 1 - y_0^2 \\
\Leftrightarrow\ &(1 - y_0)^2 (x_1^2 + x_2^2) = (1 - y_0)(1 + y_0)
\end{aligned}$$

Wir können diese Gleichung durch $1 - y_0$ teilen, da $1 - y_0 \neq 0$, denn $(y_0, y_1, y_2) \neq N$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ &(1 - y_0)(x_1^2 + x_2^2) = 1 + y_0 \\
\Leftrightarrow\ &x_1^2 + x_2^2 - 1 = y_0(1 + x_1^2 + x_2^2) \\
\Leftrightarrow\ &y_0 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (7) folgt nun

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \\
y_1 &= (1 - y_0)x_1 = \Big(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\Big)x_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \\
y_2 &= (1 - y_0)x_2 = \Big(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\Big)x_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$F_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \ F_N(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1, 2x_2).$$

Mit demselben Vorgehen bestimmen wir nun auch F_S: F_S ist die Umkehrabbildung von $p_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$, das heißt

$$F_S = p_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}.$$

Bestimme nun die Abbildungsvorschrift von F_S. Für festes, aber beliebiges $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei also

$$F_S(x_1, x_2) = (y_0, y_1, y_2)$$

für $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. Nun gilt

$$(x_1, x_2) = \big(p_S \circ p_S^{-1}\big)(x_1, x_2) = \big(p_S \circ F_S\big)(x_1, x_2) = p_S(y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{1+y_0}(y_1, y_2).$$

Hier basiert die letzte Umformung auf der Definition von p_S. Vergleich der Komponenten liefert

$$y_1 = (1+y_0)x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = (1+y_0)x_2. \tag{8}$$

Für die Bestimmung von y_0 verwenden wir, dass $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, das heißt insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
&y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ &y_0^2 + (1+y_0)^2 x_1^2 + (1+y_0)^2 x_2^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ &(1+y_0)^2 (x_1^2 + x_2^2) = 1 - y_0^2 \\
\Leftrightarrow\ &(1+y_0)^2 (x_1^2 + x_2^2) = (1-y_0)(1+y_0)
\end{aligned}$$

Wir können diese Gleichung durch $1+y_0$ teilen, da $1+y_0 \neq 0$, denn $(y_0, y_1, y_2) \neq S$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1+y_0)(x_1^2 + x_2^2) = 1 - y_0 \\
&\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = y_0(-1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{-x_1^2 - x_2^2 - 1} = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Dies und (8) implizieren

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \\
y_1 &= (1+y_0)x_1 = \left(1 + \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right)x_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \\
y_2 &= (1+y_0)x_2 = \left(1 + \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\right)x_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$F_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{S\},\ \ F_S(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(1 - x_1^2 - x_2^2, 2x_1, 2x_2).$$

Wir betrachten nun noch $F_N^{-1} \circ F_S$. Der Definitionsbereich von $F_N^{-1} \circ F_S$ ist gegeben durch

$$F_S^{-1}\big(V_S \cap F_N(\mathbb{R}^3)\big) = F_S^{-1}\big(\mathbb{R}^3 \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \{N\})\big) = F_S^{-1}\big(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}\big) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Der Bildbereich ist

$$F_N^{-1}\big(F_S(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})\big) = F_N^{-1}\big(\mathbb{S}^2 \setminus \{S,N\}\big) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

das heißt

$$F_N^{-1} \circ F_S : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\big(F_N^{-1} \circ F_S\big)(x_1,x_2) = p_N\big(F_S(x_1,x_2)\big) &= p_N\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2+1}(1-x_1^2-x_2^2, 2x_1, 2x_2)\right) \\
&= \frac{1}{1-\frac{1-x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2+1}}\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\right) \\
&= \frac{x_1^2+x_2^2+1}{2x_1^2+2x_2^2}\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$F_N^{-1} \circ F_S : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \big(F_N^{-1} \circ F_S\big)(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(x_1,x_2).$$

Aufgabe 3 (*Zylinder*)
Der Zylinder ist gegeben durch $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass der Zylinder eine reguläre Fläche ist und berechnen Sie die Tangentialebene von Z in $p = (0,1,2) \in Z$.

Wir wollen Proposition 2.4 aus dem Skript anwenden, um nachzuweisen, dass Z eine reguläre Fläche ist:
Dazu wählen wir $V_0 = \mathbb{R}^3$ (klarerweise offen) und definieren

$$f : V_0 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := x^2+y^2-1.$$

Als Produkt und Summe glatter Funktionen ist f glatt und es gilt

$$Z = f^{-1}(0).$$

Für die Anwendung von Proposition 2.4 müssen wir nun noch überprüfen, dass

$$\mathrm{grad} f(p) \neq (0,0,0)^t \quad \forall p = (x,y,z) \in Z.$$

Allgemein gilt für beliebiges $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\mathrm{grad} f(p) = (2x, 2y, 0)^t.$$

Demnach folgt

$$\operatorname{grad} f(p) = (0,0,0)^t \;\Leftrightarrow\; x = y = 0 \;\Leftrightarrow\; p = (0,0,z) \notin Z,$$

das heißt für alle $p \in Z$ ist $\operatorname{grad} f(p) \neq (0,0,0)^t$. Mit Proposition 2.4 ist Z eine reguläre Fläche.

Für die Berechnung der Tangentialebene von Z in $p = (0,1,2) \in Z$ verwenden wir Proposition 2.15 aus dem Skript. Damit gilt nun mit unser gerade getroffenen Wahl von V_0 und f

$$T_p Z = \operatorname{grad} f(p)^{\perp},$$

das heißt

$$T_{(0,1,2)} Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \; \subset \mathbb{R}^3.$$