
Aufgabe 1 (*Der Rotationstorus*)

Der Rotationstorus ist durch

$$F(u,v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big), \quad 0 < u, v < 2\pi, 0 < r < R$$

gegeben, vgl. Aufgabe 1, Serie 05.
Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform, die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

- zur ersten Fundamentalform:
  Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos u)\sin v \\ (R + r\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Damit folgt (unter Anwendung des trigonometrischen Pythagoras bei der Berechnung von g_{11} und g_{22})

$$\begin{aligned} g_{11}(u,v) &= \Big|\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\Big|^2 = r^2, \\ g_{12}(u,v) &= \Big\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\Big\rangle = 0 = g_{21}(u,v) \\ g_{22}(u,v) &= \Big|\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\Big|^2 = (R + r\cos u)^2. \end{aligned}$$

  Die darstellende Matrix der ersten Fundamentalform bezüglich der Basis $\big(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\big)$ des Tangentialraums $T_{F(u,v)}S$, $S \coloneqq F\big((0,2\pi)\times(0,2\pi)\big)$, ist somit

$$\big(g_{ij}(u,v)\big)_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}.$$

- zur zweiten Fundamentalform:
  Wir wollen die darstellende Matrix der zweiten Fundamentalform bezüglich der Basis $\big(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\big)$ des Tangentialraums $T_{F(u,v)}S$ berechnen. Dafür gilt nach Definition 2.29 aus dem Skript

$$h_{ij}(u,v) = \Big\langle \frac{\partial^2 F}{\partial_i\,\partial_j}(u,v), N(u,v)\Big\rangle \quad \forall\, 1 \le i, j \le 2,$$

wobei N ein stetig gewähltes Einheitsnormalenfeld von S ist.
Die zweiten partiellen Ableitungen von F sind

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\cos u\cos v \\ -r\cos u\sin v \\ -r\sin u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} r\sin u\sin v \\ -r\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v) = \begin{pmatrix} -(R+r\cos u)\cos v \\ -(R+r\cos u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -r(R+r\cos u)\cos u\cos v \\ -r(R+r\cos u)\cos u\sin v \\ -r(R+r\cos u)\sin u \end{pmatrix}$$

steht nach Definition des Kreuzprodukts senkrecht auf dem von $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$ und $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$ erzeugten reellen Unterraum. Dieser Unterraum ist nach Proposition 2.13 gerade der Tangentialraum $T_{F(u,v)}S$. Damit ist

$$N(u,v) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)}{|\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)|} = \begin{pmatrix} -\cos u\cos v \\ -\cos u\sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

normiert und orthogonal zu $T_{F(u,v)}S$. Ein stetiges Einheitsnormalenfeld von S ist also durch

$$N : (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{S}^2, \quad N(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u\cos v \\ -\cos u\sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir erhalten also

$$h_{11}(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v), N(u,v) \right\rangle = r$$

$$h_{12}(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}(u,v), N(u,v) \right\rangle = 0$$

$$h_{22}(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v), N(u,v) \right\rangle = (R+r\cos u)\cos u.$$

Die darstellende Matrix der zweiten Fundamentalform bezüglich $\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right)$ ist demnach

$$\big(h_{ij}(u,v)\big)_{ij} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R+r\cos u)\cos u \end{pmatrix}.$$

- zur Gauß-Krümmung:
Nach Definition 2.34 aus dem Skript ist für beliebiges, aber festes $p \in S$ die Gauß-Krümmung $K(p)$ gegeben durch

$$K(p) = \det(W_p),$$

wobei W_p für eine darstellende Matrix der Weingarten-Abbildung $W_p : T_pS \to T_pS$ von S in p steht. Wir müssen also nun eine darstellende Matrix der Weingarten-Abbildung W_p berechnen. Nach der Definition der zweiten Fundamentalform gilt

$$II_p(X,Y) = \big\langle W_p(X), Y \big\rangle \quad \forall X, Y \in T_pS$$

Sei $\big(w_{ij}(u,v)\big)_{ij}$ die darstellende Matrix von W_p bezüglich der Basis $\big(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\big)$ von T_pS. Dann gilt $\forall\, 1 \leq i,j \leq 2$

$$\begin{aligned} h_{ij}(u,v) &= II_p\Big(\frac{\partial F}{\partial_i}(u,v), \frac{\partial F}{\partial_j}(u,v)\Big) = \Big\langle W_p\Big(\frac{\partial F}{\partial_j}(u,v)\Big), \frac{\partial F}{\partial_i}(u,v)\Big\rangle \\ &= \Big\langle w_{1j}(u,v)\frac{\partial F}{\partial_1}(u,v) + w_{2j}(u,v)\frac{\partial F}{\partial_2}(u,v), \frac{\partial F}{\partial_i}(u,v)\Big\rangle \\ &= g_{i1}(u,v)w_{1j}(u,v) + g_{i2}(u,v)w_{2j}(u,v). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise gilt also

$$\big(h_{ij}(u,v)\big)_{ij} = \big(g_{ij}(u,v)\big)_{ij}\big(w_{ij}(u,v)\big)_{ij}$$

und Multiplikation mit der inversen Matrix liefert somit die allgemeine Identität

$$\big(w_{ij}(u,v)\big)_{ij} = \big(g_{ij}(u,v)\big)_{ij}^{-1}\big(h_{ij}(u,v)\big)_{ij}.$$

In unserem konkreten Fall einer parametrisierten Fläche gilt also

$$\begin{aligned} \big(w_{ij}(u,v)\big)_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+r\cos u)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R+r\cos u)\cos u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R+r\cos u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$K(p) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R+r\cos u} \end{pmatrix} = \frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}.$$

- zur mittleren Krümmung:
Nach Definition 2.34 aus dem Skript gilt für festes, aber beliebiges $p \in S$, dass die mittlere Krümmung gegeben ist durch

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\big(w_{ij}(u,v)\big)_{ij}\Big) = \frac{R+2r\cos u}{2r(R+r\cos u)}.$$

Aufgabe 2 (*Tschebyscheff-Netz*)

Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung mit $U = (0, A) \times (0, B)$. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für jedes Rechteck $R = [u^1, u^1 + a] \times [u^2, u^2 + b] \subset U$ sind die gegenüberliegenden Seiten von $F(R)$ gleich lang.

(ii) Es gilt $\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0$ in ganz U.

Man zeige ferner, dass unter diesen beiden Bedingungen eine Parametertransformation $\phi : U \to \widetilde{U}$ existiert, so dass bzgl. der Parametrisierung $\widetilde{F} := F \circ \phi^{-1}$ die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

hat, wobei θ der Winkel zwischen den Koordinatenlinien ist.

Hinweis: Betrachte für den zweiten Aufgabenteil die Abbildung

$$\phi : U \to \widetilde{U}, \quad \phi(u^1, u^2) := \left(\int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x, y)}\, dx, \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(x, y)}\, dy \right).$$

Seien $(a, b) \in (0, A) \times (0, B)$ beliebig, aber fest und sei $R = [u^1, u^1 + a] \times [u^2, u^2 + b]$. Betrachte nun die Kurvenpaare

$$\begin{aligned} c_1 &: [0, a] \to V,\ c_1(t) := F(u^1 + t, u^2), \\ c_2 &: [0, a] \to V,\ c_2(t) := F(u^1 + t, u^2 + b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, b] \to V,\ \gamma_1(s) := F(u^1, u^2 + s) \\ \gamma_2 &: [0, b] \to V,\ \gamma_2(s) := F(u^1 + a, u^2 + s), \end{aligned}$$

welche die jeweils gegenüberliegenden Seiten von $F(R)$ parametrisieren. Für die Längen der Kurven gilt (mithilfe der Kettenregel und nach Definition der ersten Fundamentalform)

$$\begin{aligned} L(c_1) &= \int_0^a |c_1'(t)|\, dt = \int_0^a \left| \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1 + t, u^2) \right| dt = \int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1 + t, u^2)}\, dt \\ L(c_2) &= \int_0^a \left| \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1 + t, u^2 + b) \right| dt = \int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1 + t, u^2 + b)}\, dt \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L(\gamma_1) &= \int_0^b |\gamma_1'(s)|\, ds = \int_0^b \left| \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, u^2 + s) \right| ds = \int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1, u^2 + s)}\, ds \\ L(\gamma_2) &= \int_0^b \left| \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1 + a, u^2 + s) \right| ds = \int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1 + a, u^2 + s)}\, ds. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall\,(a,b)$ mit $[u^1, u^1+a] \times [u^2, u^2+b] \subset U$ gelte, dass

$$L(c_1) = L(c_2) \Leftrightarrow \int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1+t, u^2)}\,dt = \int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1+t, u^2+b)}\,dt$$
$$L(\gamma_1) = L(\gamma_2) \Leftrightarrow \int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1, u^2+s)}\,ds = \int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1+a, u^2+s)}\,ds$$

Mit dem HDI folgt durch Ableiten der Integralgleichungen, dass $\forall\,(a,b)$ mit $[u^1, u^1+a] \times [u^2, u^2+b] \subset U$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{g_{11}(u^1+a, u^2)} = \sqrt{g_{11}(u^1+a, u^2+b)} \\ \Leftrightarrow \quad & g_{11}(u^1+a, u^2) = g_{11}(u^1+a, u^2+b) \\ & \sqrt{g_{22}(u^1, u^2+b)} = \sqrt{g_{22}(u^1+a, u^2+b)} \\ \Leftrightarrow \quad & g_{22}(u^1, u^2+b) = g_{22}(u^1+a, u^2+b). \end{aligned}$$

Da diese Gleichheiten $\forall\,(a,b)$ mit $[u^1, u^1+a] \times [u^2, u^2+b] \subset U$ gelten, folgt, dass g_{11} konstant bezüglich der zweiten Koordinate und g_{22} konstant bezüglich der ersten Koordinate ist. Das heißt $\forall\,(u^1, u^2) \in U$:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}(u^1, u^2) = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(u^1, u^2) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es gelte $\forall\,(u^1, u^2) \in U$, dass

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}(u^1, u^2) = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(u^1, u^2) = 0,$$

das heißt g_{11} ist bezüglich u^2 und g_{22} bezüglich u^1 konstant. Damit folgt $\forall\,(a,b)$ mit $[u^1, u^1+a] \times [u^2, u^2+b] \subset U$:

$$\begin{aligned} g_{11}(u^1+t, u^2) &= g_{11}(u^1+t, u^2+b) \quad \forall\, t \in (0,a) \\ g_{22}(u^1, u^2+s) &= g_{22}(u^1+a, u^2+s) \quad \forall\, s \in (0,b). \end{aligned}$$

Integration dieser Gleichheiten (mit vorigem Wurzelziehen) liefert

$$\int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1+t, u^2)}\,dt = \int_0^a \sqrt{g_{11}(u^1+t, u^2+b)}\,dt$$
$$\int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1, u^2+s)}\,ds = \int_0^b \sqrt{g_{22}(u^1+a, u^2+s)}\,ds.$$

Dies ist äquivalent, dazu dass $\forall\,(a,b)$ mit $R = [u^1, u^1+a] \times [u^2, u^2+b] \subset U$

$$L(c_1) = L(c_2), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma_2).$$

Da c_1, c_2 und γ_1, γ_2 die gegenüberliegenden Seiten von $F(R)$ parametrisieren, sind diese also gleich lang.

Für den zweiten Aufgabenteil nehme nun an, dass die lokale Parametrisierung (U, F, V) die Bedingung (i) bzw. (ii) erfüllt.
Sei zunächst $\phi : U \to \tilde{U}$ beliebige Parametertransformation und $\tilde{F} := F \circ \phi^{-1}$. Dann gilt für die darstellende Matrix $\big(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})\big)_{ij}$ der ersten Fundamentalform bezüglich der neuen lokalen Parametrisierung $(\tilde{U}, \tilde{F}, V)$ von S:

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})\big)_{ij} &= (D_{\tilde{u}}\tilde{F})^t D_{\tilde{u}}\tilde{F} = \big(D_{\phi(u)}(F \circ \phi^{-1})\big)^t D_{\phi(u)}(F \circ \phi^{-1}) \\
&= (D_u F D_{\phi(u)}\phi^{-1})^t D_u F D_{\phi(u)}\phi^{-1} \\
&= (D_{\phi(t)}\phi^{-1})^t (D_u F)^t D_u F D_{\phi(u)}\phi^{-1} \\
&= (D_{\phi(t)}\phi^{-1})^t \big(g_{ij}(u)\big)_{ij} D_{\phi(t)}\phi^{-1} \quad \forall\, \tilde{u} \in \tilde{U}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dabei haben wir in der ersten Gleichheit die Definition der darstellenden Matrix der ersten Fundamentalform bezüglich $(\tilde{U}, \tilde{F}, V)$ benutzt. In der zweiten Gleichheit wurde die Definition von $\tilde{F}$, in der dritten Gleichheit die Kettenregel und in der vierten Gleichheit eine Rechenregel für transponierte Matrizen verwendet. Sei nun

$$\phi : U \to \widetilde{U}, \quad \phi(u^1, u^2) := \left(\int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x, y)}\, dx, \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(x, y)}\, dy\right).$$

Da aufgrund von (ii) g_{11} konstant bezüglich der zweiten Koordinate und g_{22} konstant bezüglich der ersten Koordinate ist, können wir ϕ umformen zu

$$\phi(u^1, u^2) = \left(\int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x, u^2)}\, dx, \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(u^1, y)}\, dy\right).$$

Dann gilt mit dem HDI

$$\begin{aligned}
D_u\phi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x, u^2)}\, dx & \frac{\partial}{\partial u^2} \int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x, u^2)}\, dx \\ \frac{\partial}{\partial u^1} \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(u^1, y)}\, dy & \frac{\partial}{\partial u^2} \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(u^1, y)}\, dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}(u^1, u^2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{22}(u^1, u^2)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
D_{\phi(u)}\phi^{-1} &= (D_u\phi)^{-1} = \frac{1}{\det(D_u\phi)} D_u\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{11}(u^1, u^2)}\sqrt{g_{22}(u^1, u^2)}} \begin{pmatrix} \sqrt{g_{11}(u^1, u^2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{22}(u^1, u^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{22}(u^1, u^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{11}(u^1, u^2)}} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei die erste Umformung auf der aus Analysis bekannten Identität für die Jacobi-Matrix der Umkehrfunktion ϕ^{-1} und die zweite Umformung auf der Cramerschen

Regel basiert. Einsetzen dieser Darstellung in (1) liefert

$$\begin{aligned}
\big(\tilde g_{ij}(\tilde u)\big)_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{22}(u^1,u^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{11}(u^1,u^2)}} \end{pmatrix} \big(g_{ij}(u)\big)_{ij} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{22}(u^1,u^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{11}(u^1,u^2)}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_{12}(u^1,u^2)}{\sqrt{g_{11}(u^1,u^2) g_{22}(u^1,u^2)}} \\ \frac{g_{21}(u^1,u^2)}{\sqrt{g_{11}(u^1,u^2) g_{22}(u^1,u^2)}} & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, \tilde u \in \tilde U.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{g_{12}(u^1,u^2)}{\sqrt{g_{11}(u^1,u^2) g_{22}(u^1,u^2)}} = \frac{\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2)\rangle}{|\frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2)|\,|\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2)|} = \cos\theta,$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel zwischen $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2)$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2)$ ist, also der Winkel zwischen den Koordinatenlinien. Insgesamt

$$\big(\tilde g_{ij}(\tilde u)\big)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, \tilde u \in \tilde U.$$

Aufgabe 3 (*Das Möbiusband*)

Man betrachte die Abbildung $F : [-\pi,\pi) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\theta,t) := \left(\left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Das Bild $S = F\big([-\pi,\pi) \times (-1,1)\big)$ ist ein Möbiusband. Zeigen Sie, dass S eine reguläre Fläche ist, die aber nicht orientierbar ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein stetiges Einheitsvektorfeld $N : S \to \mathbb{R}^3$ gibt. Beschränken Sie Ihre Untersuchung von N auf die Kurve $K := F\big([-\pi,\pi) \times \{0\}\big)$, indem Sie für jedes $p \in K$ zunächst die Tangentialebene T_pS (mit Hilfe der Abbildung F) bestimmen. Zeigen Sie dann, dass die Abbildung N in K unstetig ist.

- $S = F\big([-\pi,\pi) \times (-1,1)\big)$ ist reguläre Fläche.
  Wir betrachten die Abbildung

  $$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(\theta,t) := \left(\left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

  Dann ist

  $$S = F(U_1) \cup F(U_2) \cup F(U_3) \cup F(U_4)$$

mit

$$U_1 := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1,1), \quad U_2 := (0,\pi) \times (-1,1),$$
$$U_3 := \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \times (-1,1), \quad U_4 := (-\pi, 0) \times (-1,1).$$

Zeige nun, dass $F : U_i \to F(U_i)$ Homöomorphismus ist $\forall\, 1 \leq i \leq 4$. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $i = 1, 3$
   Sei $(\theta, t) \in \left\{(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right\} \times (-1,1)$ beliebig, aber fest.

$$\Rightarrow \cos\theta \neq 0, \quad 1 + t\cos\frac{\theta}{2} \neq 0, \quad \cos\frac{\theta}{2} \neq 0. \tag{2}$$

Sei $(x, y, z) = \left((1 + t\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta, (1 + t\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\Rightarrow x\sin\theta - y\cos\theta = 0. \tag{3}$$

Teilen von (3) durch $\cos\theta \neq 0$

$$\Rightarrow x\tan\theta - y = 0.$$

Wegen (2) ist $x \neq 0$, somit

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Umformung von x unter Verwendung von (2)

$$\Rightarrow t = \left(\frac{x}{\cos\theta} - 1\right)\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

2. Fall: $i = 2, 4$
   Sei $(\theta, t) \in \left\{(-\pi, 0) \cup (0, \pi)\right\} \times (-1,1)$ beliebig, aber fest.

$$\Rightarrow \sin\theta \neq 0, \quad 1 + t\cos\frac{\theta}{2} \neq 0, \quad \sin\frac{\theta}{2} \neq 0. \tag{4}$$

Sei $(x, y, z) = \left((1 + t\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta, (1 + t\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\Rightarrow x\sin\theta - y\cos\theta = 0. \tag{5}$$

Teilen von (5) durch $\sin\theta \neq 0$

$$\Rightarrow x - y\cot\theta = 0.$$

Wegen (4) ist $y \neq 0$, somit

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Umformung von z unter Verwendung von (2)

$$\Rightarrow t = \frac{z}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

$\Rightarrow F : U_i \to F(U_i)$ ist Homöomorphismus $\forall\, 1 \leq i \leq 4$, denn Fallunterscheidung hat gezeigt, dass die Abbildungen bijektiv und deren Umkehrabbildungen stetig sind.
Zudem gilt:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t), \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t) \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - (1 + t\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta \\ -\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta + (1 + t\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta \\ \frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0 \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1).\end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{rang} D_{(\theta,t)}F = \operatorname{rang}\Big(\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t), \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)\Big) = 2 \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1).$

$\Rightarrow S$ ist regulär (nach Definition 2.1 aus Skript)

- S ist nicht orientierbar.
  Bemerke zunächst, dass

$$F(-\pi,0) = (-1,0,0) \text{ und } \lim_{\theta \nearrow \pi} F(\theta,0) = (-1,0,0). \tag{6}$$

Nehme an, dass ein stetiges Einheitsnormalenfeld $N : S \to \mathbb{R}^3$ existiert. Somit gilt

$$N\big(F(\theta,t)\big) \;\Big|\Big|\; \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t) \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1),$$

denn $T_{F(\theta,t)}S = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\big(\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t), \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)\big)$. Zudem ist

$$|N\big(F(\theta,t)\big)| = 1 \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1).$$

Die einzigen Möglichkeiten für N sind somit (aufgrund der Stetigkeit von N) gegeben durch

1. Fall:

$$N\big(F(\theta,t)\big) = \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)}{|\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)|} \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1).$$

2. Fall:

$$N\big(F(\theta,t)\big) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)}{|\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,t)|} \quad \forall\, (\theta,t) \in [-\pi,\pi) \times (-1,1).$$

In beiden Fällen gelangen wir nun zu einem Widerspruch:

1. Fall: $\forall\, \theta \in [-\pi,\pi)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}N\big(F(\theta,0)\big) = \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,0) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,0)}{|\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,0) \times \frac{\partial F}{\partial t}(\theta,0)|} &= \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = N\big(F(-\pi,0)\big) \overset{(6)}{=} N\big(\lim_{\theta\nearrow\pi} F(\theta,0)\big) \overset{N \text{ stetig n. Ann.}}{=} \lim_{\theta\nearrow\pi} N\big(F(\theta,0)\big)$$

$$= \lim_{\theta\nearrow\pi} \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ↯$$

2. Fall: Analoges Argument liefert auch im zweiten Fall einen Widerspruch.

Aufgabe 4 (*Gauß-Abbildung kompakter Flächen*)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, nicht leere, reguläre Fläche.

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung $N : S \to \mathbb{S}^2$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $K \geq 0$, falls die Gauß-Abbildung auch injektiv ist.

c) Verbessern Sie a) und zeigen Sie, dass die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf $S_+ := \{x \in S \mid K(x) \geq 0\}$ surjektiv ist.

Hinweis: Betrachten Sie für einen beliebiger Einheitsvektor $n \in \mathbb{S}^2$ die Familie der affinen Ebenen, auf denen n senkrecht steht. Eine dieser affinen Ebenen hat die gewünschte Eigenschaft.

a) Sei $N \in \mathbb{S}^2$ beliebig, aber fest. Betrachte die Ebene

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \, : \, \langle x, N\rangle = 0\},$$

das heißt E ist die Ebene, auf der N senkrecht steht. Wie im Hinweis gegeben betrachten wir nun die Familie $(E_r)_{r\in\mathbb{R}}$ der affinen Ebenen

$$E_r := E + rN \quad \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren

$$R := \sup\{r \in \mathbb{R} \, : \, \exists\, p \in S \cap E_r\}. \tag{7}$$

Da S nach Voraussetzung kompakt, also insbesondere beschränkt, ist, existieren $\tilde{R}, \hat{R} \in \mathbb{R}$, so dass

$$S \cap E_r = \emptyset \quad \forall\, r \geq \tilde{R}$$

und

$$S \cap E_r = \emptyset \quad \forall\, r \leq \hat{R}.$$

Insbesondere ist also $\hat{R} \leq R \leq \tilde{R}$, das heißt $R \in \mathbb{R}$. Wir wollen nun zeigen, dass in (7) das Supremum angenommen wird, die Gleichheit also sogar mit dem Maximum anstatt des Supremums gilt. Wir wissen nach der Definition des Supremums in Analysis, dass gilt:

$$\exists\ (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ \exists\ p_{r_n} \in S \cap E_{r_n} \quad \text{und} \quad r_n \to R \ \text{ für } n \to \infty.$$

Die Folge $(p_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere in S enthalten. Da S nach Voraussetzung kompakt ist, existiert also eine Teilfolge $(p_{r_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $p_{r_{n_k}} \to p$ für $k \to \infty$ mit $p \in S$.
Wir wollen nun noch folgern, dass $p \in E_R$: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $p_{r_{n_k}} \in E_{r_{n_k}}$, das heißt nach Definition der affinen Ebenen haben wir

$$p_{r_{n_k}} = e_k + r_{n_k} N \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

mit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$. Da $(p_{r_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge insbesondere eine Cauchyfolge ist und die Abbildung, die einen Vektor auf das orthogonale Komplement des Vektors zu N abbildet, stetig ist, ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da $\mathbb{R}^3$ vollständig ist, existiert $e \in \mathbb{R}^3$, sodass $e_k \to e$ für $k \to \infty$. Es ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ und da E als linearer Unterraum abgeschlossen ist, folgt $e \in E$. Mit den Konvergenzen $e_k \to e \in E$ und $r_{n_k} \to R$ für $k \to \infty$ ergibt sich somit

$$p_{r_{n_k}} = e_k + r_{n_k} N \to e + RN \in E + RN = E_R \quad \text{ für } k \to \infty.$$

Damit ist $p \in S \cap E_R$. Wir erhalten also

$$R = \max\{r \in \mathbb{R}\ :\ \exists\, p \in S \cap E_r\}.$$

Somit berührt E_R die Fläche S (mindestens) in dem Punkt p und ganz S liegt auf einer Seite von E_R. Damit ist $E_R = T_pS + p$. Nach Defintion von E_R ist also N Einheitsnormalenvektor von S in p. Damit ist die Gauß-Abbildung surjektiv.

b) Wir führen einen indirekten Beweis. Nehme also an $\exists\ p \in S$ mit $K(p) < 0$. Da p hyperbolischer Punkt ist, folgt mit Satz 2.36, dass S auf beiden Seiten von $p + T_pS$ liegt. Betrachte die Familie affiner Ebenen

$$E_r := rN(p) + T_pS \quad \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Dann ist aus a) bekannt: $\exists\ R > 0$ mit $E_R = q + T_qS$, sodass $T_qS \perp N(p)$ und ganz S auf einer Seite von $q + T_qS$ liegt. Da $T_qS \perp N(p)$ folgt $N(q) = N(p)$. Aber $p \neq q$, denn S liegt auf beiden Seiten von $p + T_pS$ und nur auf einer Seite von $q + T_qS = q + T_pS$. Also ist die Gauß-Abbildung nicht injektiv.

c) Wir haben in a) zu beliebigem $N \in \mathbb{S}^2$ einen Punkt $p \in S$ gefunden, sodass S komplett auf einer Seite von $p + T_pS$ liegt und N Einheitsnormalenvektor zu S in p ist. Nach Satz 2.36 ist somit $K(p) \geq 0$, das heißt $p \in S_+$. Demnach ist die Einschränkung $N_+ : S_+ \to \mathbb{S}^2$ immer noch surjektiv.