Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 25.04.2023
M.Sc C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Krümmung*) (4 Punkte)

1) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

2) Berechne die Krümmung der Ellipse $c(t) = (a \cos t, b \sin t)^t,\ t \in [0, 2\pi),\ a \neq b$.

Aufgabe 2 (*Abschätzung der Krümmung*) (4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die Kurve verlaufe in der Kreisscheibe vom Radius R, d.h., $\|c(t)\| \leq R$ für alle $t \in I$. In $t_0 \in I$ berühre die Kurve den Rand der Kreisscheibe, d.h., $\|c(t_0)\| = R$. Zeigen Sie, dass für die Krümmung die folgende Abschätzung

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}$$

gilt. (*Hinweis. Betrachte* $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\|c(t)\|^2$ *und* $\frac{d^2}{dt^2}\big|_{t=0}\|c(t)\|^2$.)

Aufgabe 3 (*Umlaufzahl*) (6 Punkte)

Sei $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$c(t) = (2 \cos t + 1)(\cos t, \sin t).$$

a) Zeigen Sie, dass diese Kurve geschlossen ist und finden Sie die minimale Periode L. Ist c einfach geschlossen?
b) Zeigen Sie Remark 1.37, nämlich, für eine periodische reguläre parametrisierte ebene Kurve mit Periode L gilt

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t)|c'(t)|dt.$$

c) Bestimmen Sie die Umlaufzahl n_c der oben gegebenen Kurve c.

Bitte wenden Sie!

Aufgabe 4 (*Totalkrümmung*) (4* Bonus-Punkte)

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(a) = c(b)$. Man zeige, dass für die *Totalkrümmung* der Kurve

$$\int_a^b |\kappa(t)| dt \geq \pi$$

gilt. *Hinweis: Widerspruchsargument. Man nehme* $\int_a^b |\kappa(t)| dt < \pi$ *an. Wähle eine Winkelfunktion* $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $c'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))^t$ *und zeige*

$$0 \leq \max_{t\in[a,b]} \theta(t) - \min_{t\in[a,b]} \theta(t) < \pi, \tag{1}$$

woraus man die Existenz eines $v \in \mathbb{S}^1$ *mit* $\langle c'(t), v\rangle > 0$ *für alle* $t \in [a, b]$ *folgere. Nun integriere man von a bis b und erhalte ein Widerspruch. Im Beweis von* (1) *benutzen Sie die Gleichung,*

$$\theta'(t) = \kappa(t),$$

die wir schon in der Vorlesung bewiesen haben.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe am Dienstag, den 02.05.2023 bis 12:00 Uhr**.