Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kuren und Flächen — SS 2023, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 01.05.2023
M.Sc C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Evolute*) (8 Punkte)

Es sei $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Weiterhin gelte $\kappa(t) > 0$ und $\kappa'(t) \geq 0$ für alle t. Für $t_0 \in [0, \infty)$ ist der *Krümmungsmittelpunkt* $m_c(t_0)$ gegeben durch

$$m_c(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0).$$

Der *Krümmungskreis* oder *Schmiegkreis* an $c(t_0)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $m_c(t_0)$ und Radius $\frac{1}{|\kappa(t_0)|}$. Wir betrachten die Kurve der Krümmungsmittelpunkte, die so genannte *Evolute* $m_c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto m_c(t)$.

(Teil A)
(i) Zeigen Sie, dass für die Ableitung von m_c folgendes gilt:

$$\dot{m}_c(t) = -\frac{\dot{\kappa}(t)}{(\kappa(t))^2} n(t).$$

(ii) Berechnen Sie $\|\dot{m}_c\|$ und die Bogenlänge $L(m_{c|[a,b]})$ für die auf ein Intervall $[a, b] \subset [0, \infty)$ eingeschränkten Evolute.

(iii) Folgern Sie aus (i), dass gilt:

$$\|m_c(a) - m_c(b)\| \leq \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}.$$

(iv) Beweisen Sie nun, dass für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ gilt: Der Krümmungskreis an $c(t_2)$ ist im Krümmungskreis an $c(t_1)$ enthalten. Insbesondere gilt für jedes $t_0 \in [0, \infty)$: Die restliche Kurve $c_{|[t_0, \infty)}$ verlässt nicht den Krümmungskreis an $c(t_0)$.

(v) Zeigen Sie, dass die Evolute endliche Länge hat, d.h. $L(m_c) = \lim_{b \to \infty} L(m_{c|[0,b]})$ existiert und ist endlich. Folgern Sie, dass die Evolute einem Grenzpunkt $m_c(\infty) := \lim_{t \to \infty} m_c(t)$ zustrebt.

(vi) Beweisen Sie, dass $\|m_c(\infty) - c(t)\|$ für $t \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Bitte wenden Sie!

(Teil B) Zeigen Sie, dass die Evolute der Normalparabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ gegeben ist durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}\, x^2\right\}.$$

Aufgabe 2 (*Raumkurve*) (4 Punkte + 2* Bonus-Punkte)

1) Berechnen Sie für $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, wobei $a > 0, b > 0$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist, die Frenetgleichung und die zugehörige Krümmung und Torsion.

2) Sei $b : I = [t_0, t_1] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Definiere $c : I \to \mathbb{R}^3, c(t) := \int_{t_0}^t b(s) \times b'(s) ds$. Zeigen Sie:

a) Die Torsion τ von c ist konstant.

b) Jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit konstanter Torsion (o.E. $\tau = 1$ — Warum ist diese Annahme gerechtfertigt?) kann auf diese Weise konstruiert werden.

3) Finden Sie die Bedingung, die Raumkurven mit $\tau(t) = 0$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Aufgabe 3 (*Elastische Energie von Kurven*) (2* Bonus-Punkte)

Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve mit Umlaufzahl $n_c \neq 0$. Zeigen Sie

$$\int_0^L \kappa^2 ds \geq \frac{4\pi^2}{L}$$

und dass Gleichheit genau dann in der Ungleichung gilt, wenn c einen Kreis parametrisiert.
Bemerkung: Die Aussage gilt auch, falls $n_c = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 08.05.2023 bis 12:00 Uhr**.