Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 08.05.2023
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Raumkurve*) (4 Punkte)
Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ verschiedene, nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven mit nirgends verschwindenden Krümmungen und Torsionen. Man sagt, c und $\tilde{c}$ bilden ein *Bertrandsches Kurvenpaar*, falls gilt

$$c(t) + \mathbb{R}n_c(t) = \tilde{c}(t) + \mathbb{R}n_{\tilde{c}}(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

wobei n_c (bzw. $n_{\tilde{c}}$) der Normalvektor von c (bzw. $\tilde{c}$) ist.
Seien c und $\tilde{c}$ ein Bertrandsches Kurvenpaar. Zeigen Sie:
a) $\tilde{c} = c + rn_c$, wobei r konstant ist.
b) Der Winkel, der von c' und $\tilde{c}'$ eingeschlossen wird, ist konstant.
c) Sowohl c als auch $\tilde{c}$ haben eine konstante Krümmung und eine konstante Torsion.

Aufgabe 2 (*Sphäre*) (4 Punkte)
Für die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ können wir zwei lokale Parametrisierungen $(U_N = \mathbb{R}^2, F_N, V_N = \mathbb{R}^3)$ und $(U_S = \mathbb{R}^2, F_S, V_S = \mathbb{R}^3)$ angeben, indem wir die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1, 0, 0)$ und p_S vom Südpol $S = (-1, 0, 0)$ mit Radius 1 verwenden. Dann gilt $\mathbb{S}^2 = F_N(U_N) \cup F_S(U_S)$.
In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch

$$p_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, x_2); \quad p_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, x_2).$$

Berechnen Sie F_N, F_S, und $F_N^{-1} \circ F_S : F_S^{-1}(V_N \cap V_S) \to F_N^{-1}(V_N \cap V_S)$.

Aufgabe 3 (*Zylinder*) (4 Punkte)
Der Zylinder ist gegeben durch $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass der Zylinder eine reguläre Fläche ist und berechnen Sie die Tangentialebene von Z in $p = (0, 1, 2) \in Z$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 15.05.2023 bis 12:00 Uhr**.