Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 15.05.2023
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*lokale Eigenschaft*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Eigenschaft, eine reguläre Fläche zu sein, eine lokale Eigenschaft ist. Genauer: es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge und für jeden Punkt $p \in S$ gebe es eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, so dass $V \cap S$ eine reguläre Fläche ist. Dann ist auch S selbst eine reguläre Fläche.

Aufgabe 2 (*Rotationsfläche*) (4 Punkte)

Man betrachte eine Kurve in der (r, z)-Ebene gegeben durch $c(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a, b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die z-Achse gedreht wird, erhalten wir eine Rotationsfläche. Wir führen den Parameter θ ein, um die Rotationsfläche wie folgt zu parametrisieren:

$$F(t,\theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t)) \quad \text{für } t \in (a,b),\ \theta \in (0, 2\pi).$$

Hierbei bestimmt t die Position auf der Kurve und θ den Drehwinkel. Die t-Kurven heißen Meridiane und die θ-Kurven Breitenkreise.

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene für die Rotationsfläche an einem beliebigen Punkt $F(t, \theta)$ mit $t \in (a, b),\ \theta \in (0, 2\pi)$.

(b) Betrachten Sie die zu $c(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

Aufgabe 3 (*die erste Fundamentalform*) (4 Punkte)

Betrachten Sie das parametrisierte Flächenstück

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \quad r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (0, 2\pi).$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten der ersten Fundamentalform (g_{ij}).

b) Sei $c(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = e^{t(\cot\alpha)/2}$ und $\theta(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, \pi]$ und einer Konstanten α. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, dass der Winkel zwischen der Kurve $c(t)$ und den Kurven $\{\theta = \text{konst.}\}$ auf dem Flächenstück gleich α ist.

Hinweis: Wenn sich zwei reguläre Kurven c_1 und c_2 in einem Punkt $p = c_1(0) = c_2(0)$ schneiden, dann ist der Winkel ϕ in p zwischen den Kurven definiert durch

$$\cos\phi = \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0)\rangle}{\|c_1'(0)\|\|c_2'(0)\|}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 22.05.2023 bis 12:00 Uhr**.