Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang — 22.05.23
M.Sc C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Der Rotationstorus*) (4 Punkte)

Der Rotationstorus ist durch

$$F(u,v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big), \quad 0 < u, v < 2\pi, 0 < r < R$$

gegeben, vgl. Aufgabe 1, Serie 05.
Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform, die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 2 (*Tschebyscheff-Netz*) (4 Punkte)

Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung mit $U = (0, A) \times (0, B)$. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für jedes Rechteck $R = [u^1, u^1 + a] \times [u^2, u^2 + b] \subset U$ sind die gegenüberliegenden Seiten von $F(R)$ gleich lang.

(ii) Es gilt $\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0$ in ganz U.

Man zeige ferner, dass unter diesen beiden Bedingungen eine Parametertransformation $\phi : U \to \widetilde{U}$ existiert, so dass bzgl. der Parametrisierung $\widetilde{F} := F \circ \phi^{-1}$ die erste Fundamentalform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

hat, wobei θ der Winkel zwischen den Koordinatenlinien ist.

Hinweis: Betrachte für den zweiten Aufgabenteil die Abbildung

$$\phi : U \to \widetilde{U}, \quad \phi(u^1, u^2) := \left(\int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}(x,y)}\, dx, \int_0^{u_2} \sqrt{g_{22}(x,y)}\, dy\right).$$

Aufgabe 3 (*Das Möbiusband*) (4 Punkte)

Man betrachte die Abbildung $F : [-\pi, \pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\theta, t) := \left(\left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Das Bild $S = F\big([-\pi,\pi] \times (-1,1)\big)$ ist ein Möbiusband. Zeigen Sie, dass S eine reguläre Fläche ist, die aber nicht orientierbar ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein stetiges Einheitsvektorfeld $N : S \to \mathbb{R}^3$ gibt. Beschränken Sie Ihre Untersuchung von N auf die Kurve $K := F\big([-\pi,\pi) \times \{0\}\big)$, indem Sie für jedes $p \in K$ zunächst die Tangentialebene T_pS (mit Hilfe der Abbildung F) bestimmen. Zeigen Sie dann, dass die Abbildung N in K unstetig ist.

Aufgabe 4 (*Gauß-Abbildung kompakter Flächen*) (4* Bonus-Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, nicht leere, reguläre Fläche.

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung $N : S \to \mathbb{S}^2$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $K \geq 0$, falls die Gauß-Abbildung auch injektiv ist.

c) Verbessern Sie a) und zeigen Sie, dass die Einschränkung der Gauß-Abbildung auf $S_+ := \{x \in S \mid K(x) \geq 0\}$ surjektiv ist.

Hinweis: Betrachten Sie für einen beliebiger Einheitsvektor $n \in \mathbb{S}^2$ die Familie der affinen Ebenen, auf denen n senkrecht steht. Eine dieser affinen Ebenen hat die gewünschte Eigenschaft.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 05.06.2023 bis 12:00 Uhr**.