Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 05.06.23
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Das Katenoid oder die Kettenfläche*) (4 Punkte)

Eine Drehfläche mit $r(t) = a\cosh\left(\frac{t+b}{a}\right)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, ist ein Katenoid, auch Kettenfläche genannt. Zeigen Sie, dass eine Drehfläche genau dann Minimalfläche (d.h. $H \equiv 0$) ist, wenn sie eine Kettenfläche ist.

Aufgabe 2 (*Die Röhrenfläche*) (4 Punkte)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit nicht verschwindender Krümmung $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann sind die Windung τ und das Frénet-Dreibein (c', n, b) definiert. Sei $r > 0$. Eine *Röhrenfläche* mit Dicke $2r$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(t,\varphi) = c(t) + r \cdot (\cos\varphi \cdot n(t) + \sin\varphi \cdot b(t)).$$

Sei $1 - r\cos\varphi\kappa(t) > 0 \;\; \forall\, (t,\varphi) \in I \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung gegeben sind durch

$$K(t,\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\kappa(t)\cos\varphi}{1 - r\cos\varphi\kappa(t)}$$

und

$$H(t,\varphi) = \frac{1}{2r}\frac{1 - 2r\cos\varphi\kappa(t)}{1 - r\cos\varphi\kappa(t)}.$$

Aufgabe 3 (*geodätische und Normal-Krümmung, geodätische Torsion*) (4 Punkte)

Sei S orientierte Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N, $c : I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(I) \subset S$. Das Darboux-3-Bein E_1, E_2, E_3 ist dann definiert durch $E_1(s) = c'(s)$, $E_3(s) = N(c(s))$, $E_2(s) = E_3(s) \times E_1(s) \; \forall\, s \in I$. Man leite für dieses 3-Bein die folgenden Ableitungsgleichungen her, die den Frénet-Gleichungen entsprechen:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei treten die folgenden Größen auf: $\kappa_g = \langle c'', E_2 \rangle$ (*die geodätische Krümmung*) $\kappa_n = II(c', c')$ (*die Normalkrümmung*) sowie eine *geodätische Torsion* τ_g.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 12.06.2023 bis 12:00 Uhr**.