Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang — 12.06.23
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Die Parallelfläche*) (4 Punkte)

Für ein Flächenstück $F : U \to V \subset \mathbb{R}^3$ sei die Parallelfläche im Abstand $\epsilon > 0$ erklärt durch

$$F_\epsilon(u^1, u^2) := F(u^1, u^2) + \epsilon \cdot N(u^1, u^2) \quad \forall\, (u^1, u^2) \in U,$$

wobei N die Einheitsnormale ist. Überlegen Sie für welche $\epsilon > 0$ die Menge $F_\epsilon(U)$ eine reguläre Fläche ist und zeigen Sie:

(a) Für die Hauptkrümmungen κ_i^ϵ von F_ϵ und κ_i von F gilt $\kappa_i^\epsilon = \kappa_i/(1 - \epsilon\kappa_i)$.

(b) Falls F konstante mittlere Krümmung $H \neq 0$ besitzt, so hat F_ϵ für $\epsilon = \frac{1}{2H}$ konstante Gauß-Krümmung.

Aufgabe 2 (*Flächeninhalt und Integration auf Flächen*) (4 Punkte)

(a) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve, $p \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ fest. Sei $v(t) = p - c(t)\ \forall\, t \in I$. Der verallgemeinerte Kegel über c ist die Regelfläche definiert durch

$$\begin{aligned} S &= F\big(I \times (0,1)\big), \\ F(t,s) &= (1-s)c(t) + sp = c(t) + sv(t) \quad \forall\, (t,s) \in I \times (0,1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

(b) Der Drehtorus ist definiert durch

$$\begin{aligned} S &= F\big([0,2\pi) \times [0,2\pi)\big), \\ F(\theta,s) &= \big((2+\cos s)\cos\theta, (2+\cos s)\sin\theta, \sin s\big) \quad \forall\, (\theta,s) \in [0,2\pi) \times [0,2\pi). \end{aligned}$$

Sie H die mittlere Krümmung des Drehtorus. Berechnen Sie

$$\int_S H^2 dA.$$

Das Funktional $S \mapsto \int_S H^2 dA$ heißt Willmore-Funktional.

Aufgabe 3 (*Proposition 2.51 über Minimalflächen*) (4 Punkte)

Sei S der Graph einer glatten Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, also $S = \big\{ \big(x, y, \varphi(x,y)\big) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in U \big\}$. Zeigen Sie, dass S genau dann eine Minimalfläche ist, wenn φ folgende partielle Differentialgleichung in U erfüllt:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0.$$

Aufgabe 4 (*Ableitung der Determinante*) (4* Bonus-Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $g : I \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $t \mapsto g(t)$ eine differenzierbare Kurve invertierbarer, reeller $(n \times n)$- Matrizen. Zeigen Sie, dass in I gilt:

$$\frac{d}{dt} \ln \det(g) = \mathrm{Spur}\Big(g^{-1} \frac{d}{dt} g\Big).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 19.06.2023 bis 12:00 Uhr**.