Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 19.06.23
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Helikoid*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die *Wendelfläche* (oder das *Helikoid*), definiert durch

$$F(u^1, u^2) = (u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, u^2) \quad \forall\, (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 2 (*Isometrie*) (4 Punkte)

a) Seien S_1, S_2 reguläre Flächen. Zeigen Sie: Ist $f : S_1 \to S_2$ eine Isometrie, so ist auch $f^{-1} : S_2 \to S_1$ eine Isometrie.

b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine euklidische Bewegung, d.h. $\Phi(x) = Ax + b$, wobei $A \in O(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$. Sei S eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass $f := \Phi_{|S} : S \to \Phi(S)$ eine Isometrie ist.

c) Sei $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x-y-Ebene, $S_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : S_1 \to S_2, \quad f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)$$

eine lokale Isometrie ist.

Aufgabe 3 (*Richtungsableitung*) (4 Punkte)

Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche mit den Vektorfeldern $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ und $Y(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Berechnen Sie für die Funktionen $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ und $f_3(x, y, z) = z$ auf S die Richtungsableitungen nach X und Y.

Aufgabe 4 (*Kovariante Ableitung*) (4* Bonus-Punkte)

Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre und

$$c : \mathbb{R} \to S, \quad c(t) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta)$$

mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ beliebig, aber fest. Die Kurve c beschreibt einen Breitenkreis der Sphäre. Zeigen Sie: Die kovariante Ableitung von c' verschwindet genau dann, wenn $\theta = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 26.06.2023 bis 12:00 Uhr**.