Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und Flächen — SS 2023, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 26.06.23
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*Kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

Sei $0 < r < R$. Der Rotationstorus ist durch $S = F\big((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)\big)$,

$F(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big) \quad \forall\,(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$

gegeben. Seien $u_0, v_0 \in (0, 2\pi)$ fest und betrachten Sie die Kurven $c_1 : (0, 2\pi) \to S$, $c_1(t) = F(t, v_0)$ und $c_2 : (0, 2\pi) \to S$, $c_2(t) = F(u_0, t)$. Berechnen Sie die kovarianten Ableitungen von c_1' bzw. von c_2' längs c_1 bzw. c_2.

Aufgabe 2 (*Kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

Sei S eine reguläre Fläche, $\tilde{p} \in S$, v ein Vektoreld auf S, $w_{\tilde{p}} \in T_{\tilde{p}}S$. Zeigen Sie, dass Definition 3.24 der kovarianten Ableitung $\nabla_{w_{\tilde{p}}} v$ nicht davon abhängig ist, welche glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $c(0) = \tilde{p}$ und $c'(0) = w_{\tilde{p}}$ man nimmt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass in einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) von S um $\tilde{p}$ für das Vektorfeld $v\big(F(u)\big) = \sum_{k=1}^{2} \xi^k(u) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)\ \forall\, u \in U$ die kovariante Ableitung in Richtung $w_{\tilde{p}} = \sum_{k=1}^{2} \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{u}), \tilde{u} = F^{-1}(\tilde{p})$, gegeben ist durch

$$\nabla_{w_{\tilde{p}}}\Big(\sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}\Big) = \sum_k \Big(\sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(\tilde{u})\eta^l + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(\tilde{u})\xi^i(\tilde{u})\eta^j\Big)\frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{u}).$$

Aufgabe 3 (*Torsionsfreiheit*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für zwei glatte Vektorfelder v und w auf einer regulären Fläche gilt:

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w].$$

Aufgabe 4 (*Gauß-Krümmung und Riemannsche Krümmung*) (4* Bonus-Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung einer orientierten Fläche S bzgl. einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) gegeben ist durch

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} g^{jk} R_{ijk}^i.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 03.07.2023 bis 12:00 Uhr**.