Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kurven und lächen — SS 2023, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 04.07.23
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (*zurückgezogene Riemannsche Metrik*) (4 Punkte)

Wie in Aufgabe 1 von Blatt 05 sei die stereographische Projektion p_N der Sphäre $\mathbb{S}^2$ vom Nordpol $N = (1, 0, 0)$ gegeben durch

$$p_N : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad p_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, x_2).$$

Sei I die erste Fundamentalform von $\mathbb{S}^2$ und sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ die Inverse von p_N. Berechnen Sie die zurückgezogene Riemannsche Metrik $\phi^*(I)$.

Aufgabe 2 (*Gauß-Krümmung einer Metrik*) (4 Punkte)

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstane. Im Fall $\kappa \geq 0$ sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, im Fall $\kappa < 0$ dagegen sei $S = \big\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < -\frac{4}{\kappa}\big\}$. Auf S sei die riemannsche Metrik g in den kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\big(g_{ij}(x, y)\big)_{ij} = \frac{1}{(1 + \kappa(x^2 + y^2)/4)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.

Aufgabe 3 (*Poincaré-Halbebene*) (4 Punkte)

Die Poincaré-Halbebene ist erklärt als die Menge $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$\big(g_{ij}(x, y)\big)_{ij} = y^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie die Differentialgleichung für die Geodätischen her und finden Sie die Geodätischen.

Hinweis: Die Geodätischen sind die Halbgeraden mit konstantem x sowie die Halbkreise, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

Aufgabe 4 (*Geodäten auf Drehflächen, geodätische Krümmung*) (4* Bonus-Punkte)

Es sei $c(t) = \big(\rho(t), z(t)\big) : I \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert mit $\rho(t) > 0$ und $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = \big(\rho(u)\cos v, \rho(u)\sin v, z(u)\big)$ die zugehörige Drehfläche.

a) Berechnen Sie die kovarianten Ableitungen $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial u}$, $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial v}$ und $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial v}} \frac{\partial F}{\partial v}$.

b) Zeigen Sie: Die Kurven $u \mapsto F(u,v)$ (Meridiane) sind Geodäten für alle $v \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise $v \mapsto F(u,v)$ für festes $u \in I$. Außerdem zeigen Sie: Die Kurven $v \mapsto F(u,v)$ (Breitenkreise) sind Geodäten genau für diejenigen $u \in I$ mit $\rho'(u) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 10.07.2023 bis 12:00 Uhr.**