

Aufgabe 1 (*Geodätische*)

(4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g , $p \in S$ und $v \in T_p S$. Sei c die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Sei $\delta \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Kurve $\tilde{c}(t) := c(\delta t)$ die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $\tilde{c}(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = \delta v$ ist.

Aufgabe 2 (*Parallelverschiebung*)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung ein Konzept der inneren Geometrie ist. Genauer heißt dies: Ist $c : I \rightarrow S_1$ eine glatte Kurve, v ein glattes Vektorfeld längs c und $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine lokale Isometrie, dann ist v parallel längs c genau dann, wenn $df \circ v$ parallel längs $f \circ c$ ist.

Folgern Sie daraus ferner, dass für $I = [t_0, t_1]$, $c(t_0) = p$, $c(t_1) = q$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{P_c} & T_q S_1 \\ d_p f \downarrow & & \downarrow d_q f \\ T_{f(p)} S_2 & \xrightarrow{P_{f \circ c}} & T_{f(q)} S_2 \end{array}$$

Aufgabe 3 (*Parallelverschiebung*)

(4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g , sei $c : I \rightarrow S$ eine konstante Kurve, $c \equiv p$. Ein Vektorfeld längs c ist also eine Abbildung $v : I \rightarrow T_p S$. Zeigen Sie, dass v genau dann parallel ist, wenn v konstant ist.

Aufgabe 4 (*Jacobi-Feld*)

(4* Bonus-Punkte)

Zeigen Sie, dass auf einer Drehfläche mit Parametrisierung $F(t, \varphi) = (r(t) \cos(\varphi), r(t) \sin(\varphi), t)$ das Vektorfeld $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ ein Jacobi-Feld längs der Meridiankurven ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 17.07.2023 bis 12:00 Uhr.**