

ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

PROF. GUOFANG WANG

CONTENTS

0. Vorab: Der Euklidische Raum	2
1. Kurven	4
1.1. Parametrisierungen	4
1.2. Länge	7
1.3. Ebene Kurven	9
1.4. Umlaufzahl und Totalkrümmung	15
1.5. Raumkurven	27
2. Klassische Flächentheorie	30
2.1. Reguläre Flächen	30
2.2. Die Tangentialebene	36
2.3. Die erste Fundamentalform (Metrik)	39
2.4. Normalenfelder und Orientierbarkeit	42
2.5. Die zweite Fundamentalform	44
2.6. Die Krümmung	47
2.7. Flächeninhalten und Integration auf Flächen	56
2.8. Einige Klassen von Flächen	61
2.9. Minimalflächen	65
3. Innere Geometrie von Flächen	76
3.1. Isometrien	76
3.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung	79
3.3. Krümmungstensor und Theorema Egregium	87
3.4. Riemannsche Metriken	92
3.5. Geodätische	95
3.6. Exponentialabbildung	103
3.7. Parallelverschiebung	110
3.8. Jacobi-Felder	113
3.9. Der Divergenzsatz	116
3.10. Variation der Metrik	122

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär "Elementare Differentialgeometrie".

0. VORAB: DER EUKLIDISCHE RAUM

In dieser Vorlesung geht es (hauptsächlich) um differenzierbare Kurven und Flächen im (\mathbb{R}^n, d) , wobei zumeist $n = 3$ oder $n = 2$. Mit \mathbb{R}^n bezeichnen wir den Vektorraum aller Spaltenvektoren mit n reellen Einträgen,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \dots, x^n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Das euklidische Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n wird mit spitzen Klammern geschrieben,

$$x \cdot y = \langle (x^1, \dots, x^n)^t, (y^1, \dots, y^n)^t \rangle = \sum_{j=1}^n x^j y^j.$$

Die euklidische Norm (bzw. der Abstand) ist gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(bzw.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Mit diesem Abstand ist \mathbb{R}^n metrischer Raum. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Isometrie, falls F injektiv und surjektiv ist und gilt:

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Man kann zeigen, dass die Menge der Isometrien vom \mathbb{R}^n eine Gruppe ist. Man nennt die Gruppe die Isometriegruppe.

Theorem 0.1 (Isometriegruppe von \mathbb{R}^n). *Die Isometrien des \mathbb{R}^n sind die Abbildungen der Form*

$$F(x) = Sx + a \quad \text{mit } S \in \mathbb{O}(n) \text{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch euklidische Bewegungen (rigid motion auf Englisch).

Proof. Es ist leicht zu sehen, dass jede solche Abbildung isometrisch und surjektiv ist. Sei umgekehrt $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isometrie, zunächst mit $F(0) = 0$. Dann folgt

$$|F(x)| = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließt wir,

$$\begin{aligned} \langle F(x), F(y) \rangle &= -\frac{1}{2}(|F(x) - F(y)|^2 - |F(x)|^2 - |F(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ist e_1, \dots, e_n die Standardbasis, so folgt

$$(1) \quad \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

d.h., $F(e_1), \dots, F(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \langle F(x), F(e_i) \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i).$$

Somit ist F eine lineare Abbildung. Mit (1) ist $F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Sei schließlich $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tau_{-a}(x) = x - a$ folgt dann $\tau_{-a} \circ F(0) = 0$, also $\tau_{-a} \circ F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, bzw. $F(x) = Sx + a$. ■

Remark 0.2. Für eine Isometrie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $F(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = F(0)$ und $S = DF(0)$ (sogar $S = DF(x) = D_x F$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Hierbei ist $DF(x) = D_x F$ die Jacobi-Matrix in $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

für $f = (f^1, \dots, f^m)^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Speziell für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\text{grad } f = Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)^t$$

der Gradient.

Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V^\perp := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in V \}$$

das orthogonale Komplement.

Das Vektorprodukt auf \mathbb{R}^3 ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ -x^1 y^3 + x^3 y^1 \\ x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{pmatrix}.$$

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + O(h(x))$ (bzw. $o(h(x))$) für $x \rightarrow 0$ bedeutet, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \leq C, \quad \text{für alle } x \neq 0 \text{ aus einer Umgebung von } 0,$$

(bzw.

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \rightarrow 0, \quad \text{mit } 0 \neq x \rightarrow 0.$$

)

1. KURVEN

1.1. Parametrisierungen.

Definition 1.1 (parametrisierte Kurve). Eine parametrisierte Kurve ist eine C^∞ -Abbildung

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Das Intervall I aus der Definition kann offen, abgeschlossen oder halbgeschlossen sein; auch kann I beschränkt oder unbeschränkt sein. Eine Abbildung $c(t)$ wird gegeben durch

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^t,$$

wobei $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Die Abbildung c ist genau dann C^∞ , wenn für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Funktion c_i C^∞ ist. Die Ableitung c' von c ist $(c'_1(t), c'_2(t), \dots, c'_n(t))^t$.

Definition 1.2 (reguläre parametrisierte Kurve). Eine reguläre parametrisierte Kurve ist eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit

$$c'(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$.

Beispiel 1.3. a. (Die Gerade) Die Abbildung

$$\begin{aligned} c_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow p + vt, \end{aligned}$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^n$, ist eine parametrisierte Kurve. Ferner gilt $c'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c genau dann regulär parametrisiert, wenn $v \neq 0$.

b. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{aligned} c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (r \cos t, r \sin t)^t, \end{aligned}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

b'. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{aligned} c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (r \cos 2t, r \sin 2t)^t, \end{aligned}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

c. (*Traktrix* oder *Schleppkurve*) Die Kurve

$$c(t) = (\sin t, \cos t + \ln \tan(t/2))^t$$

ist regulär auf $(0, \frac{\pi}{2})$, aber nicht regulär auf $(0, \pi)$, denn $\dot{c}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)^t$.

Definition 1.4 (Umparametrisierung). Seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven. Man sagt, dass d eine Umparametrisierung von c ist, g.d.w. ein Diffeomorphismus

$$\varphi : J \rightarrow I$$

existiert mit

$$d = c \circ \varphi.$$

φ heißt eine Parametertransformation.

Ein Abbildung $\varphi : J \rightarrow I$ heißt *Diffeomorphismus*, g.d.w. sie eine C^∞ -Bijektion und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ auch C^∞ ist. Nach der Kettenregel gilt $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$. Damit eine Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve wiederum regulär ist, denn

$$d'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0.$$

Im Beispiel 1.3 b ist die reguläre parametrisierte c_2 eine Umparametrisierung von c_1 , denn $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = 2t$.

Definition 1.5. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation “ \sim ” definiert durch

$$d \sim c \Leftrightarrow d \text{ ist eine Umparametrisierung von } c.$$

Proposition 1.6. Die Relation “ \sim ” ist eine Äquivalenzrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.

Beweis. Wir müssen die Reflexivität, die Symmetrie, und die Transitivität nachprüfen:

Reflexivität. ($c \sim c$): sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und ein triviale Diffeomorphismus $\varphi = \text{Id}_I$, dann ist $c = c \circ \varphi$, d.h. $c \sim c$.

Symmetrie. ($d \sim c \Rightarrow c \sim d$): seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven so dass $d \sim c$. Aus der Definition von \sim existiert einer Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ mit $d = c \circ \varphi$. Ebenfalls ist seine Umkehrabbildung φ^{-1} ein Diffeomorphismus. Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Dann gilt $c = d \circ \psi$, d.h., $c \sim d$.

Transitivität. ($d \sim c$ und $e \sim d \Rightarrow e \sim c$): seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $e : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven mit $d \sim c$ und $e \sim d$. Aus der Definition von \sim folgt die Existenz zweier Diffeomorphismen $\varphi : J \rightarrow I$ und $\psi : K \rightarrow J$ mit $d = c \circ \varphi$ und $e = d \circ \psi$. Dann gilt $e = c \circ (\varphi \circ \psi)$ und $\varphi \circ \psi$ ist auch ein Diffeomorphismus. Somit gilt $e \sim c$. ■

Definition 1.7 (Kurve). Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. “ \sim ” von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind. Wir bezeichnen mit $[c]$ die Äquivalenzklasse von c .

Definition 1.8 (Spur einer Kurve). Die Spur einer Kurve ist die Menge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Die Spur von $[c]$ ist wohldefiniert, denn: ist $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ mit $d = c \circ \varphi$, und somit gilt $d(J) = c(\varphi(I)) = c(I)$.

Im Beispiel 1.3, die Spur von $[c_0]$ ist eine Gerade und die Spur von $[c_1]$ ist der Kreis

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Eine parametertransformation kann die Richtung, in der die Bildkurve durchlaufen wird, entweder umkehren oder erhalten. $\varphi(t) = t$ ändert nichts an der parametrisierten Kurve, $\varphi(t) = -t$ dagegen kehrt den Durchlaufsinne um.

Definition 1.9. Eine parametertransformation φ heißt orientierungserhaltend, falls $\varphi'(t) > 0$. Die parametertransformation φ heißt orientierungsumkehrend, falls $\varphi'(t) < 0$.

Eine Umparametrisierung $d = c \circ \varphi$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), falls φ orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist.

Jede parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. (Beweis: Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $\varphi'(t_1) < 0$ und $\varphi'(t_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $t_3 \in (t_1, t_2)$ mit $\varphi'(t_3) = 0$. Das ist unmöglich.)

Definition 1.10. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation “ \sim_+ ” definiert durch

$$d \sim_+ c \Leftrightarrow d \text{ ist eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von } c,$$

Proposition 1.11. Die Relation “ \sim_+ ” ist eine Äquivalenzrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.

Definition 1.12. Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. “ \sim_+ ” von regulären parametrisierten Kurven. Wir bezeichnen mit $[c]_+$ die Äquivalenzklasse von c .

Jede Kurve hat genau zwei Orientierungen, d.h. es gibt genau zwei orientierte Kurven.

1.2. Länge.

Definition 1.13 (Länge einer Kurve). Die Länge einer Kurve $[c]$ ist definiert durch

$$L[c] := \int_I \|c'(t)\| dt,$$

wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Proposition 1.14. *Die Länge von $[c]$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve und $d = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_J \|d'(t)\| dt &= \int_J \|c'(\varphi)\varphi'(t)\| dt && \text{(Kettenregel)} \\ &= \int_J \|c'(\varphi)\| \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_I \|c'(s)\| ds && (s = \varphi(t)). \end{aligned}$$

■

Die Länge von c_0 im Intervall $[t_0, t_1]$ ist

$$L[c_0] = \int_{t_0}^{t_1} \|v\| dt = (t_1 - t_0) \cdot \|v\|.$$

Die Länge von c_1 im Intervall $[0, 2\pi]$ ist

$$L[c_1] = \int_0^{2\pi} \|c_1'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition 1.15 (nach Bogenlänge parametrisierte Kurve). Eine reguläre Parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisierte g.d.w. für alle $t \in I$ gilt

$$\|c'(t)\| = 1.$$

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ fest. Für alle $t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0, t]}] = \int_{t_0}^t \|c'(s)\| ds = t - t_0.$$

Tatsächlich, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_0, t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0, t]}] = t - t_0.$$

Proposition 1.16 (Existenz der Umparametrisierung nach Bogenlänge). *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Dann existiert es eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c .*

(“Eindeutigkeit”) Zwei Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c unterscheiden sich durch eine affine Parametertransformation der Form

$$t \rightarrow \pm t + r_0,$$

für ein $r \in \mathbb{R}$.

Beweis. (Existenz) Sei $t_0 \in I$ und setze

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t \|c'(s)\| ds.$$

Die Funktion ψ ist C^∞ und $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$ für alle $t \in I$. Setze $J := \psi(I)$. Es ist klar, dass $\psi : I \rightarrow J$ ein Diffeomorphismus ist mit ihrer Umkehrabbildung $\varphi := \psi^{-1}$ und

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}.$$

Setze $d = c \circ \varphi$. Dann ist d eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von c und nach der Kettenregel gilt es für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= c'(\varphi(t))\varphi'(t) & (\varphi'(t) &= \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}) \\ &= \frac{c'(\varphi(t))}{\|c'(\varphi)\|}, \end{aligned}$$

so dass $\|d'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Somit wird die Existenz bewiesen.

(Eindeutigkeit) Sei $e : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ andere Umparametrisierung nach Bogenlänge von c . Dann ist e auch eine Umparametrisierung von d (Sehe den Beweis der Transitivität der Relation \sim), d.h. ein Diffeomorphismus $\eta : K \rightarrow J$ so existiert, dass $e = d \circ \eta$. Aus

$$1 = \|e'(t)\| = \|d'(\eta(t))\| \cdot |\eta'(t)| = |\eta'(t)|,$$

haben wir

$$\eta(t) = \pm t + r_0,$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$. ■

Beispiel 1.17. a. Sei $c_0(t) = p + vt$ in Beispiele 1 gegeben. Im diesem Fall ist die im letzten Beweis angegebene Funktion ψ

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \|v\| ds = (t - t_0)\|v\|.$$

Ihre Umkehrabbildung ist $\varphi(t) = \psi^{-1} = t_0 + t \frac{1}{\|v\|}$. Die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_0 nun ist

$$\tilde{c}_0(t) = c_0 \circ \varphi(t) = p + t_0 v + t \frac{v}{\|v\|}.$$

b. Sei $c_1(t) = (r \cos t, r \sin t) : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Setze $t_0 = 0$. Dann haben wir

$$\psi(t) = \int_0^t r ds = rt$$

und ihre Umkehrabbildung

$$\varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{t}{r}$$

mit $J := \psi([0, 2\pi)) = [0, 2r\pi)$. Die Abbildung

$$\tilde{c}_1(t) = c_1 \circ \varphi(t) = \left(r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right) : [0, 2r\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ist die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_1 .

1.3. Ebene Kurven.

Definition 1.18 (ebene Kurve). Eine ebene Kurve ist eine Kurve von \mathbb{R}^2 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definition 1.19 (Normalenfeld). Sei $c : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld zu $c = (c_1, c_2)^t$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} n : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow n(t) := Jc'(t) = \begin{pmatrix} -c'_2(t) \\ c'_1(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

(c', n) bilden eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 . Mit anderen Worten, wir drehen dem Geschwindigkeitsvector um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn. Insbesondere gelten $\|n(t)\|^2 = 1$, $n(t) \perp c'(t)$, und

$$\det(c'(t), n(t)) = 1.$$

(Beweis. $\det(c'(t), n(t)) = \det \begin{pmatrix} c'_1 & -c'_2 \\ c'_2 & c'_1 \end{pmatrix} = \|c'(t)\|^2 = 1$.)

Bemerkung. • Das Normalenfeld n ist C^∞ .

• Das Normalenfeld (bzw. der Geschwindigkeitsvektor) hängt vom Durchlaufsinne ab.

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= c(-t) \\ \bar{c}'(t) &= -c'(-t) \\ \bar{n}(t) &= -n(-t). \end{aligned}$$

Beispiel 1.20. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$.

$$c'(t) = v, \quad n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

b) $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})^t$.

$$\begin{aligned} c'(t) &= \left(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r}\right)^t \\ n(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{r} \\ -\sin \frac{t}{r} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}c(t). \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir messen, wie stark der geschwindigkeitsvektor mit der Zeit t variiert.

Proposition 1.21. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und n das Normalenfeld zu c . Dann steht für jedes $t \in I$ der $c''(t)$ proportional zu $n(t)$.

Beweis. Wegen $\|c'(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= (\|c'\|^2)'(t) = \langle c', c' \rangle'(t) \\ &= \langle c'', c' \rangle(t) + \langle c', c'' \rangle(t) \\ &= 2\langle c'', c' \rangle(t). \end{aligned}$$

Somit $c''(t) = \langle c'', c' \rangle c' + \langle c'', n \rangle n = \langle c'', n \rangle n$. ■

Nun definieren wir den wichtige Begriff der Differentialgeometrie: die *Krümmung*.

Definition 1.22 (Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve). Die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $c''(t) = \kappa(t)n(t)$ für alle $t \in I$.

• $\kappa(t) = \langle c''(t), n(t) \rangle$ ist C^∞ .

Beispiel 1.23. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$. Wegen $c'(t) = v$ für alle t gilt dann $c''(t) = 0$ und somit $\kappa(t) = 0$.

b). $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})$. Wir wissen, dass $n(t) = -\frac{1}{r}c(t)$ und

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{t}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

Damit gilt $c'' = \frac{1}{r}n$ und $\kappa = \frac{1}{r}$.

Definition 1.24 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Die Krümmung κ von c wird definiert durch

$$\kappa := \kappa_{c \circ \varphi} \circ \varphi^{-1}, \quad \kappa(t) = \kappa_{c \circ \varphi} \circ \varphi^{-1}(t),$$

wobei $c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ist mit Krümmung (in Sinne der Def.) $\kappa_{c \circ \varphi}$.

Bemerkung. Die Krümmung von c ist wohldefiniert, d.h., κ hängt nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ab. Denn: ist $c \circ \xi$ eine andere orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c , so existiert aus Proposition 1.16 ein $r_0 \in \mathbb{R}$ so dass $\xi(t) = \varphi(t + r_0)$ für alle t . Nun gilt für die Krümmung von $t \rightarrow c \circ \varphi(t + r_0) = c \circ \xi(t)$: $\kappa_{c \circ \xi}(t) = \kappa_{c \circ \varphi}(t + r_0)$ für alle t , und somit

$$\begin{aligned} (\kappa_{c \circ \xi} \circ \xi^{-1})(t) &= \kappa_{c \circ \xi}(\xi^{-1}(t)) = \kappa_{c \circ \xi}(\varphi^{-1}(t) - r_0) \\ &= \kappa_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t) - r_0 + r_0) = \kappa_{c \circ \varphi} \circ \varphi^{-1}(t), \end{aligned}$$

d.h. $\kappa = \kappa_{c \circ \xi} \circ \xi^{-1} = \kappa_{c \circ \varphi} \circ \varphi^{-1}$.

Lemma 1.25 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(Übung !)

Proposition 1.26 (Geometrische Interpretation der Krümmung). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c . Sei $t_0 \in I$. Dann gilt für $t \in I$

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\kappa(t_0)n(t_0) + (t - t_0)^3o(t - t_0),$$

wobei $o(t - t_0) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow t_0$.

Beweis. Bei Taylorentwicklung. ■

Satz 1.27 (Frenet-Gleichungen). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' &= \kappa \cdot n \\ n' &= -\kappa \cdot c' \end{cases}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition der Krümmung κ . Zur Zweite benutzen wir die folgende Formel

$$n'(t) = \langle n'(t), c'(t) \rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t) \rangle n(t),$$

denn $\{c'(t), n(t)\}$ ist eine ONB von \mathbb{R}^2 . Beim Ableiten der Gleichheit $\langle c', n \rangle = 0$

$$0 = \langle c', n \rangle' = \langle c'', n \rangle + \langle c', n' \rangle$$

folgt

$$\langle c', n \rangle = -\langle c'', n \rangle = -\kappa$$

aus. Analog wegen $\|n\|^2 = 1$ gilt

$$0 = (\|n\|^2)' = 2\langle n', n \rangle,$$

d.h., $\langle n', n \rangle = 0$, somit wird die Zweite bewiesen. ■

Proposition 1.28 (Invarianz der Krümmung unter euklidischer Bewegung). *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei A eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung von \mathbb{R}^2 . Setze $\tilde{c} := A \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist \tilde{c} ebenfalls eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und es gilt für ihre Krümmung*

$$\tilde{\kappa} = \kappa.$$

Beweis. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist euklidische Bewegung von \mathbb{R}^2 g.d.w. existieren $B \in O(2)$ (Gruppe der orthogonalen linearen Transformationen von \mathbb{R}^2) und $v \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$A(x) = Bx + v.$$

A ist orientierungserhaltend, g.d.w. $\det B = 1$. Wegen $\tilde{c}(t) = Bc(t) + v$ für alle $t \in I$, gilt beim Ableiten

$$\tilde{c}'(t) = Bc'(t).$$

Da B eine orientierungserhaltende Transformation ist, gilt es

$$\tilde{n}(t) = Bn(t).$$

($\det(Bc', Bn) = \det(B) \det(c', n) = 1$.) Dann

$$\tilde{\kappa} = \langle \tilde{c}''(t), \tilde{n}(t) \rangle = \langle Bc''(t), Bn(t) \rangle = \langle c''(t), n(t) \rangle = \kappa. \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Ist A orientierungsumkehrende euklidische Bewegung, so gilt diesmal

$$\tilde{\kappa} = -\kappa.$$

Satz 1.29 (Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung

$$\kappa = f.$$

Seien c_1 und c_2 zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Dann existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A mit

$$c_2 = A \circ c_1.$$

Beweis. Zunächst brauchen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz. Sei $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞ -Abbildung. Seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^∞ -Abbildung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Ferner, falls $y_0 = 0$, dann gilt $y(t) = 0$ für alle $t \in I$.

(Existenz). Sei $t_0 \in I$ fest. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. Aus dem Hilfssatz existiert eine eindeutige C^∞ Lösung $(v_1, v_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir zeigen nun, dass für alle t $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positiv ONB von \mathbb{R}^2 bilden. Bei Ableiten haben wir

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle' &= 2\langle v_1', v_1 \rangle = 2f\langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_2 \rangle' &= 2\langle v_2', v_2 \rangle = -2f\langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle' &= \langle v_1', v_2 \rangle + \langle v_1, v_2' \rangle = f(\langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_1 \rangle), \end{aligned}$$

insbesondere $(\langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle)' = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 \\ \langle e_1, e_2 \rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Durch die Anwendung des obigen Satzes, gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \end{pmatrix}(t) = 0,$$

für alle $t \in I$. Zusammen mit $(\langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle)' = 0$ ergeben sich

$$\|v_1(t)\| = \|e_1\| = 1, \|v_2(t)\| = \|e_2\| = 1, \langle v_1(t), v_2(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in I$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine ONB von \mathbb{R}^2 bilden. Die Funktion $t \rightarrow \det(v_1(t), v_2(t))$ ist stetig und sie hat Werte in $\{-1, 1\}$. Also $\det(v_1(t), v_2(t)) = 1$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positive ONB von \mathbb{R}^2 bilden.

Jetzt setze

$$c(t) := \int_{t_0}^t v_1(s) ds.$$

Die Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist C^∞ , und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v_1$ und $c'' = v_1' = f v_2$. Aber $v_2 = n$, das Normalenfeld von c , denn $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ist eine positive ONB von \mathbb{R}^2 . Folglich haben wir

$$c'' = f n,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f .

(Eindeutigkeit) 1. Fall. Seien c_1 und c nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$ und $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Es ist klar, dass $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ gilt, wobei n_i das Normalenfeld von c_i ist. Aus den Frenet-Gleichungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des obigen Hilfssatzes erhalten wir $c_1' - c_2' = n_1 - n_2 = 0$ auf I , und daher

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_2(t_0) + \int_{t_0}^t c_2'(s) ds \\ &= c_1(t_0) + \int_{t_0}^t c_1'(s) ds = c_1(t), \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = c_2$.

2. Fall. Im allgemeinen Fall seien c_1, c_2 nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Finde eine orientierungserhaltende Transformation $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x) := Bx + v$ mit $\det B = 1$, so dass

$$\begin{cases} A(c_1(t_0)) = c_2(t_0), \\ Bc_1'(t_0) = c_2'(t_0), \\ Bn_1(t_0) = n_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Proposition 1.28 gilt dann

$$\kappa_{A \circ c_1} = \kappa_1 = f.$$

Wir wenden den 1. Fall auf $A \circ c_1$ und c_2 an und erhalten

$$A \circ c_1 = c_2. \quad \blacksquare$$

1.4. Umlaufzahl und Totalkrümmung.

Definition 1.30 (geschlossene Kurve). Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt periodisch mit Periode $L > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, und es kein $0 < L' < L$ gilt, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Beispiel $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode $L = 2\pi$. Somit ist die durch diese parametrisierung repräsentierte Kurve geschlossen.

Nicht jede parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch:

$$c(t) = (\cos t^3, \sin t^3).$$

Definition 1.31 (einfach geschlossene Kurve). Eine geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass

$$c|_{[0,L)} : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Lemma 1.32 (Winkelfunktion). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Dann existiert es eine C^∞ -Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $\theta_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere C^∞ -Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t , so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\theta_2 = \theta + 2k\pi.$$

Beweis. (Eindeutigkeit). Angenommen. Es gilt zwei Funktionen θ und $\theta_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2(t) \\ \sin \theta_2(t) \end{pmatrix},$$

für alle $t \in I$. Dann gilt es zu jedem $t \in I$ ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass $\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi$. Weil $\theta_2 - \theta$ auf I stetig ist, muss k konstant auf I sein, d.h. es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi,$$

für alle $t \in I$.

(Existenz). Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall. Die Menge $c'(I)$ ist in einem der folgenden Halbkreise enthalten:

$$\begin{aligned} S_R &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1, x > 0\}, & S_L &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1, x < 0\} \\ S_O &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1, y > 0\}, & S_U &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1, y < 0\}. \end{aligned}$$

Sei die Menge $c'(I)$ z. B. in S_R , d.h. $c'_1 > 0$. Für unsere Funktion θ muss also gelten

$$\frac{c'_2(t)}{c'_1(t)} = \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} = \tan \theta(t).$$

Also ist

$$\theta = \arctan\left(\frac{c'_2(t)}{c'_1(t)}\right) + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Wird der Anfangswert $\theta(a)$ vorgegeben, so ist k und damit θ eindeutig festgelegt.

2. Fall. Im Allgemeinen kann man nicht voraussetzen, dass $c'([0, T]) \subset S_R$, bzw. S_L, S_O, S_U . Es existiert aber eine Teilung $\{0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := T\}$ von $[0, T]$ so dass

$$c'([t_i, t_{i+1}]) \subset S_R \text{ oder } S_L, S_O, S_U$$

for alle $i = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Dies folgt aus der Gleichmäßigsteigkeit von c' auf dem kompaktem Intervall $[0, T]$. Wir wenden den 1. Fall auf $c'([t_0, t_1])$

an: Es existiert eine C^∞ -Funktion $\theta_0 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0(t) \\ \sin \theta_0(t) \end{pmatrix}$

für alle $t \in [t_0, t_1]$. Dann wenden wir wiederum den 1. Fall auf $c'([t_1, t_2])$ an mit der Bedingung $\theta_1(t_1) = \theta_0(t_1)$. Rekursiv wenden wir den 1. Fall auf $c'([t_i, t_{i+1}])$ an mit der Bedingung $\theta_i(t_i) = \theta_{i-1}(t_i)$, und bekommen wir am Ende eine stückerweise glatte Funktion $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $\theta_{[t_i, t_{i+1}]} := \theta_i$ definiert. Sie erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche Funktion θ ist C^∞ bei der Eindeutigkeit. ■

Die Funktion θ misst den Winkel zwischen $c'(t)$ und der x -Achse.

Definition 1.33 (Umlaufzahl). Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, periodisch mit Periode L . Sie $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie Lemma 1.32. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

Umlaufzahl von c .

Beispiel 1.34. Der Kreis vom Radius $r > 0$, $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})$ mit Periode $L = 2\pi r$.

Der Tangentialvektor ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Winkelfunktion

$$\theta(t) = \frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}.$$

und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = 1.$$

Lemma 1.35. a). n_c ist stets eine Ganze Zahl.

b). Seien $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L . Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = n_{c_1}.$$

Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = -n_{c_1}.$$

Beweis. a). Aus der Periodizität folgt $\cos(\theta(L)) = \cos(\theta(0))$, $\sin(\theta(L)) = \sin(\theta(0))$ und somit

$$\theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

b) Sie $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Die Parametertransformation hat die folgende Form

$$\varphi(t) = \pm t + r_0,$$

für $r_0 \in \mathbb{R}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob die parametertransformation die Orientierung erhält oder umkehrt. Ist θ_2 eine Winkelfunktion für c_2 wie im Lemma 1.32. Im orientierungserhaltenden Fall, ist $\theta_1 := \theta_2 \circ \varphi$ eine Winkelfunktion für c_1 , denn

$$c_1'(t) = c_2'(\varphi(t)) = (\cos(\theta_2(\varphi(t))), \sin(\theta_2(\varphi(t)))).$$

Aber $\tilde{\theta}_1(t) = \theta_2(\varphi(t))$ ist auch eine Winkelfunktion für c_1 , dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) - (\tilde{\theta}_1(L) - \tilde{\theta}_1(0)) \\ &= \theta_2(L) - \theta_2(0) - (\theta_2(\varphi(L)) - \theta_2(\varphi(0))) \\ &= \theta_2(L) - \theta_2(0) - (\theta_2(L) - \theta_2(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im orientierungsumkehrenden Fall sieht man, dass für eine Winkelfunktion θ_2 für c_2 . Die Funktion $\theta_1 := \theta_2(-t + r_0) + \pi$ eine Winkelfunktion für c_1 ist, denn dann ist $\varphi(t) = -t + r_0$ und somit

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -c_2'(-t + r_0) \\ &= -(\cos(\theta_2(-t + r_0)), \sin(\theta_2(-t + r_0))) \\ &= (\cos(\theta_2(-t + r_0) + \pi), \sin(\theta_2(-t + r_0) + \pi)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 2\pi(n_{c_1} + n_{c_2}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) + (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\
 &= \theta_1(-L + r_0) - \theta_1(r_0) + (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\
 &= (\theta_1(-L + r_0) - \theta_1(0)) - (\tilde{\theta}_1(-L + r_0) - \tilde{\theta}_1(0)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

■

Satz 1.36 (Umlaufzahl durch die Krümmung). *Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode L . Sei $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von c . Dann gilt*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt.$$

Beweis. Sei θ eine Winkelfunktion für c , d.h. es gilt

$$c'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Beim Ableiten erhalten wir

$$c''(t) = (-\sin(\theta(t))\theta'(t), \cos(\theta(t))\theta'(t)).$$

Andererseits gilt aus der Definition der Krümmung $c''(t) = \kappa(t) \cdot n(t) = \kappa(t) \cdot (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$. Daraus folgt

$$\theta'(t) = \kappa(t).$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
 n_c &= \frac{1}{2\pi} (\theta(L) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \theta'(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt.
 \end{aligned}$$

■

Remark 1.37. Für eine parametrisierte periodische reguläre ebene Kurve mit Periode L gilt

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) |c'(t)| dt.$$

Beweis. Übung.

■

Satz 1.38 (Umlaufsatz). *Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder -1 .*

Lemma 1.39 (Lifting). *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl x_0 . Sei $e : X \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann existierte eine stetige Abbildung $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ so dass*

$$e(x) = (\cos \theta(x), \sin \theta(x)).$$

(Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig* bzgl. $x_0 \in X$, falls für jeden Punkt $x \in X$ auch die Strecke zwischen x und x_0 ganz in X enthalten ist, d.h. für alle $t \in [0, 1]$ gilt $tx + (1-t)x_0 \in X$.)

Bemerkung. Ist die Abbildung $e : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ nicht surjektiv, so lässt sich die Abbildung $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ viel leichter angeben. Sei etwa $(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ nicht im Bild von e . Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi_k : (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k) &\rightarrow \mathbb{S}^1 - \{(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)\}, \\ \Psi_k(t) &= (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

eine Homöomorphismus. Dann ist $\theta := \Psi_k^{-1} \circ e : X \rightarrow (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k)$ und erfüllt

$$e(x) = (\cos \theta(x), \sin \theta(x)).$$

Die Zahl k ist dann durch die Bedingung $\theta(x_0) = \theta_0$ eindeutig festgelegt. Insbesondere gilt

$$|\theta(x_1) - \theta(x_2)| < 2\pi, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Beweis von Lemma 1.39. Sei $x \in X$ und

$$\begin{aligned} e_x : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ e_x(t) &= e(tx + (1-t)x_0). \end{aligned}$$

Wörtlich wie im Beweis zur Existenz des Winkelfunktion erhdiralt man eine Winkelfunktion θ_x mit

$$e_x(t) = (\cos \theta_x(t), \sin \theta_x(t))^t.$$

θ_x ist stetig, weil man lokal nach θ_x auflösen kann, je nachdem in welches Halbebene des Kreises man sich befindet. θ_x ist außerdem eindeutig nach Vorgabe von θ_0 . Für das gesuchte $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ kann dann nur gelten:

$$\theta(x) = \theta_x(1)$$

und ist somit eindeutig.

Wegen der Stetigkeit von

$$\tilde{e} : (t, x) \mapsto e(tx + (1-t)x_0) = e_x(t)$$

ist wegen der lokalen Auflösbarkeit auch

$$(x, t) \mapsto \theta_x(t)$$

stetig und insbesondere

$$x \mapsto \theta_x(1) = \theta(x).$$

■

Beweis des Umlaufsatzes. Durch einer Wahl der euklidischen Bewegung nehmen wir o.B.d.A. an, dass $c(t) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$, $c(0) = (0, 0)$ und $c'(0) = (0, 1)$. Setze $X := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$e : X \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|}, & t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, L), \\ c'(t), & t_2 = t_1 = t, \\ -c'(0), & (t_1, t_2) = (0, L). \end{cases}$$

Die Abbildung e ist wohldefiniert und stetig, weil c als einfach geschlossen vorausgesetzt wurde. Wir wählen eine Funktion $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ für e wie in Lemma 1.39. Wegen $e(t, t) = c'(t)$ ist $t \rightarrow \theta(t, t)$ eine Winkelfunktion wie in Lemma 1.32. Also die Umlaufzahl ist

$$\begin{aligned} 2\pi n_c &= \theta(L, L) - \theta(0, 0) \\ &= \theta(L, L) - \theta(0, L) + \theta(0, L) - \theta(0, 0) \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass $\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi$ und $\theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi$.

Nun betrachten wir das Intervall $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t < L\}$. Für alle $0 < t < L$ $e(0, t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. Also $e(0, t) \in \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$ für alle $t \in (0, L)$. Wegen der Bemerkung nach Lemma 1.39 nimmt $t \rightarrow \theta(0, t)$ sein Bild in einem Intervall der Form $(2\pi k, 2\pi(k+1))$ an, $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben

$$\begin{aligned} e(0, L) = -c'(0) = (0, -1) &\Rightarrow \theta(0, L) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ e(0, 0) = c'(0) = (0, 1) &\Rightarrow \theta(0, 0) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{aligned}$$

somit gilt

$$\theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi.$$

Analog ist $(-1, 0)$ nicht im Bild der Abbildung $t \rightarrow e(t, L) = \frac{-c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ und wir erhalten

$$\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi.$$

Also,

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi. \quad \blacksquare$$

Definition 1.40 (Konvexität). Eine ebene Kurve heißt konvex, falls für jeden ihres Punktes gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

Die Konvexitätabedingung für den Punkt $c(t_0) \Leftrightarrow$ gilt es

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t.$$

Lemma 1.41. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Normalenfeld n . Dann ist c genau dann konvex, wenn für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$$

oder für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0.$$

Beweis. Angenommen falsch. Dann gibt es t_1 und t_2 mit

$$\langle c(t_1) - c(t_1), n(t_1) \rangle \geq 0, \quad \text{und} \quad \langle c(t_2) - c(t_2), n(t_2) \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } t$$

Wir können zeigen, dass ein t_3 zwischen t_1 und t_2 derart existiert, dass

$$\langle c(t) - c(t_3), n(t_3) \rangle = 0, \quad \text{für alle } t$$

Es folgt, dass c eine Gerade sein muss. ■

Satz 1.42. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve. Sei $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung. Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. a) Gemäß Lemma 1.41 können wir annehmen, dass für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0.$$

Die Taylorentwicklung gibt uns

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\kappa(t_0)n(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2).$$

Die Skalarmultiplikation mit $n(t_0)$ liefert uns wegen $\langle c'(t), n(t) \rangle = 0$

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0) \rangle = \frac{1}{2}\kappa(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

somit $\kappa(t_0) \geq 0$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

b) Sei nun $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die Kurve konvex ist. Wäre die Kurve nicht konvex, so gäbe es ein t_0 , derart dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle,$$

sowohl negativ als auch positiv Werte annimmt. Sei t_2 der Maximum-Punkt von φ , d.h.,

$$\varphi(t_2) = \max \varphi > 0.$$

Sei t_1 der Minimum-Punkt von φ , d.h.,

$$\varphi(t_1) = \min \varphi < 0.$$

Also

$$\varphi(t_1) < 0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_2)$$

und

$$\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0.$$

Aus $\varphi'(t_1) = 0$ folgt $\langle c'(t_1), n(t_0) \rangle = 0$. Also ist

$$c'(t_1) = \pm c'(t_0).$$

Analog folgt

$$c'(t_2) = \pm c'(t_0).$$

Von $\{c'(t_0), c'(t_1), c'(t_2)\}$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen. Wir wählen $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass $c'(s_1) = c'(s_2)$, daraus gilt es

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = 2\pi k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Aus $\theta' = \kappa \geq 0$ folgt, dass θ monoton ist und somit $\theta(s_2) - \theta(s_1) \geq 0$ und $k \geq 0$. Analog folgt $\theta(s_1 + L) - \theta(s_2) = 2\pi l \geq 0$. Die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(s_1 + L) - \theta(s_1)) = k + l = 1$$

nach dem Umlaufsatz. Also muss $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Sei z. B., $k = 0$. Es folgt $\kappa = \theta' = 0$ auf $[s_1, s_2]$ und somit ist c auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade, d.h., für alle $s \in [s_1, s_2]$

$$c(s) = c(s_1) + (s - s_1)c'(s_1) = c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0).$$

Dann erhalten wir für die Funktion φ

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \langle c(s) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) - c(t_0), n(t_0) \rangle, \end{aligned}$$

für alle $s \in [s_1, s_2]$, d.h., φ ist konstant auf $[s_1, s_2]$. Also $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$. Das ist unmöglich. ■

Definition 1.43. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Man sagt, c hat einem Scheitel in $t_0 \in I$, falls

$$\kappa'(t_0) = 0.$$

Beispiel 1.44. Ellipse, die parametrisiert ist durch

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ c(t) &= (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

mit $0 < a < b$. Die Krümmung von c ist

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} -a \sin t & -a \cos t \\ b \cos t & -b \sin t \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \right\|^3} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

und

$$\kappa'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also $\kappa'(t) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$\sin t \cdot \cos t = 0,$$

d.h., $t = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$. Damit hat die Ellipse genau vier Scheitel in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Satz 1.45 (Vierscheitelsatz). *Ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte konvex ebene Kurve mit Periode L , dann hat c mindestens vier Scheitel in $[0, L)$.*

Lemma 1.46. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als zwei Punkten, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden und hat damit insbesondere unendlich viele Schnittpunkte mit der Geraden.*

Lemma 1.47. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als einem Punkt tangential, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden.*

Beweis des Vierscheitelsatzes. Die Krümmung κ von c nimmt wegen der Periodizität Maximum und Minimum an, somit haben wir schon zwei Scheitel. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Minimum in $t = 0$ und das Maximum in $t = t_0 \in (0, L)$ angenommen wird. Sei G die Gerade durch die beiden Punkte $c(0)$ und $c(t_0)$.

Gemäß Lemma 1.46 und Lemma 1.47 nehmen wir an, dass G keinen weiteren Punkte mit der Kurve gemein hat, ansonst die Krümmung auf einem ganzen Segment konstant 0 ist, und wir erhalten unendlich viele Scheitel.

Nach Anwendung einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass G die x -Achse ist. Angenommen, die Kurve hat keine weitere Scheitel. Dann verschwindet κ' nirgends auf den beiden Intervallen $(0, t_0)$ und (t_0, L) . Wegen $\int_0^L \kappa'(t) dt = \kappa(L) - \kappa(0) = 0$, muss κ' auf einen der beiden Intervall positiv, auf anderen negativ sein. Also nehmen wir ohne Einschränkung $\kappa'(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $\kappa'(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$, somit

$$\int_0^L \kappa(t)' c_2(t) dt > 0.$$

Aber wir haben aus die Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa'(t) c(t) dt &= - \int_0^L \kappa(t) c'(t) dt \\ &= \int_0^L n'(t) dt = n(L) - n(0) = 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Somit muss es einen dritten Scheitel geben, etwa in $t_1 \in (t_0, L)$. Angenommen, es gäbe keinen vierten Scheitel. Dann nehmen wir ohne Einschränkung an, dass es $\{s_1, s_2\} \subset \{0, t_0, t_1\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass κ'

auf (s_1, s_2) positiv und auf $\mathbb{S}^1 \setminus \{s_1, s_2\}$ negativ ist, existiert. Verwenden wir die obige Methode, erhalten wieder ein Widerspruch. ■

Beweis von Lemma 1.46. Sie $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L . Durch eine Parametertransformation $t \rightarrow \pm t + r_0$ können wir erreichen, dass $c(0)$ ein dritter Schnittpunkt mit der Geraden ist und $\kappa \geq 0$ erfüllt. Aus Lemma 1.32 gilt die Winkelfunktion θ , $\theta'(t) = \kappa(t) \geq 0$. Nach dem Umlaufsatz ist $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_c = 2\pi$. Also ist

$$\theta : [0, L] \rightarrow [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$$

eine glatte monoton wachsende surjektive Funktion, wobei $\theta_0 = \theta(0)$ ist.

Die Kurve c schneide die Gerade G in den Punkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < L$. Sei G parametrisiert durch $p_0 + t \cdot v$ mit $\|v\| = 1$. Sei $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ der Normalenvektor von G .

Sei I eines der drei Intervall $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ und $[t_2, L]$. In den Endpunkten I liegt c auf der Gerade G . Wenn $c(t)$ für alle $t \in I$ auf G liegt, so enthält c ein Segment von G und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also an, dass es auch Punkte $t \in I$ gibt, so dass $c(t)$ nicht auf G liegt. Nun betrachten wir die zu G parallel Gerade G_s , die durch

$$t \rightarrow p_0 + t \cdot v + s \cdot n$$

parametrisiert werden. Falls $\{s > 0 \mid G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, definiert $s_1 := \sup\{s > 0 \mid G \text{ schneidet } C_I\}$. Falls $\{s > 0 \mid G \text{ schneidet } C_I\} = \emptyset$, muss $\{s < 0 \mid G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, dann $s_1 := \inf\{s < 0 \mid G \text{ schneidet } C_I\}$. In jeden Fall schneidet G_{s_1} das Kurvestück $c|_I$ in einem Punkt τ aus dem Inneren von I tangential, d.h., $c'(\tau) = \pm v$. Das Argument gilt für jedes Intervall $I = [0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ oder $[t_2, L]$. Deshalb erhalten wir τ_1, τ_2, τ_3 mit $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < t_3 < L$ und $c'(\tau_j) = \pm v$.

Nun wir bezeichnen θ_1 den eindeutigen Wert aus $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. für den $v = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)^t$ und $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ denjenigen mit $-v = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)^t$. OEdA, annehmen wir an, dass $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, ansonsten tauschen wir die Rollen von θ_1 und θ_2 .

1. Fall. $\theta_1 > \theta_0$. Dann muss θ an den drei Stellen τ_1, τ_2, τ_3 jeweils einen der beiden Werte θ_1 oder θ_2 annehmen. Insbesondere muss θ an wenigstens zwei der frei Stellen gleich sein, z. B. $\theta(\tau_1) = \theta(\tau_2)$. Da θ monoton ist ($\theta' = \kappa \geq 0$), muss θ auf $[\tau_1, \tau_2]$ konstant sein. Also $\kappa = \theta' = 0$ auf $[\tau_1, \tau_2]$. Dann ist $c|_{[\tau_1, \tau_2]}$ ein Stück von der Gerade.

2. Fall. $\theta_1 = \theta_0$. Dann gibt es noch die Möglichkeit: $\theta(\tau_1) = \theta_1 = \theta_0$, $\theta(\tau_2) = \theta_2$ und $\theta(\tau_3) = \theta_0 + 2\pi$. Wieder wegen der Monotonie muss θ auf dem Intervall $[0, \tau_1]$ konstant sein. Dann ist $c|_{[0, \tau_1]}$ ein Stück von der Gerade. ■

Beweis von Lemma 1.47. ■

Theorem 1.48 (Isoperimetrische Ungleichung). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c . Sei $A[G]$ der Flächeninhalt des Gebietes. Dann gilt

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Wir brauchen ein Hilfssatz.

Lemma 1.49. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c . Sei $c(t) = (x(t), y(t))^t$ eine periodische Parametrisierung von c mit Periode L , die das Gebiet im mathematisch positiven Sinn umläuft, d.h., mit Umlaufzahl $+1$. Dann gilt:

$$A(G) = - \int_0^L x'(t)y(t)dt = \int_0^L x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Beweis. Es folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} X \, dx dy = - \int_0^L \langle X, n(t) \rangle dt$$

mit äußerem Normalfeld $-n$. Wähle $X = (x, y)^t$ in obiger Formel. Dann haben wir

$$\int_G \operatorname{div} X \, dx dy = \int_G 2 \, dx dy = 2A[G]$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^L \langle X, n(t) \rangle dt &= \int_0^L \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^L (-x(t)y'(t) + x'(t)y(t)) dt \end{aligned}$$

Also,

$$2A[G] = \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Die beiden anderen Formeln folgen durch partielle Integration. ■

Beweis von Satz 1.48. Sei $c(t) = (x(t), y(t))^t$ Parametrisierung von c nach Bogenlänge mit Periode L . Es ist klar, dass $L = L[c]$. Wir nehmen an, dass c das Gebiet im mathematisch positiven Sinn umläuft, ansonst betrachten wir $\bar{c}(t) = c(-t)$. Wir betrachten die komplexwertige Funktion

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(t) = x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}t\right).$$

z ist eine periodische Funktion mit Periode 2π . Wir entwickeln z in eine Fourier-Reihe

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$. Wir können die Länge von c , $L[c] = L$ durch die Fourier-Koeffizienten c_k ausdrücken

$$(1) \quad L^2 = L[c]^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2.$$

Für den Flächeninhalt von G , $A[G]$, können wir mit Hilfe des Lemma 1.49 durch die Fourier-Koeffizienten c_k ausdrücken

$$(2) \quad A[G] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2$$

Von (1) und (2) erhalten wir

$$\frac{A[G]}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

und damit

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

d.h., genau dann, wenn $c_k = 0$ für $k \neq 0, 1$. Das heißt gerade

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},$$

d.h., c beschreibt einen Kreis. ■

Beweis von (1). Einerseits gilt

$$\int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \left\| c' \frac{Lt}{2\pi} \right\|^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Andererseits gilt

$$z'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} z'(t) \overline{z'(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_l} k l e^{i(k-l)t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |c_k|^2 k^2 dt. \end{aligned}$$

■

Beweis von (2). Gemäß Lemma 1.49 gilt

$$\begin{aligned}
 2A[G] &= \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \\
 &= \int_0^L \Re\left(z\left(\frac{2\pi t}{L}\right)\frac{2\pi t}{L}i\bar{z}'\left(\frac{2\pi t}{L}\right)\right)dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \Re(z(s)i\bar{z}'(s))ds \\
 &= \int_0^{2\pi} \Re\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks} i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{c}_l (-i) l e^{ils}\right)ds \\
 &= \Re \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} l c_k \bar{c}_k e^{i(k-l)s} ds \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 2\pi.
 \end{aligned}$$

■

1.5. Raumkurven.

Definition 1.50. Eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist parametrisierte Raumkurve. Analog sind reguläre parametrisierte Raumkuren, Raumkurven und orientierte Raumkurven definiert.

Jetzt haben wir ein Problem, den Normalenvektor zu definieren.

Definition 1.51 (Krümmung einer Raumkurve). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(t) := \|c''(t)\|$ heißt Krümmung von c .

Bemerkung. a) Die Krümmung von c ist somit eine numerisch Funktion auf I , die nichtnegativ ist. Ferner, verschwindet c'' nirgends auf I , so ist $\kappa \in C^\infty$.

b) Jetzt die Orientierung hat "kein Sinn". Sei $\bar{c} : -I \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ definierte Abbildung, dann ist \bar{c} nach Bogenlänge parametrisiert und ihre Krümmung $\bar{\kappa}$ ist gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(-t)$$

für alle $t \in -I$.

c) Da die Ebene im 3-dimensionalen Raum enthalten ist, etwa als $x - y$ -Ebene, können wir ebene Kurven auch als Raumkurven ansehen. Somit wir jetzt für ebene Kurven zwei verschiedenen Definitionen der Krümmung. Ist $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$, und ist $c = (\tilde{c}, 0) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dieselbe parametrisierte Kurve, aufgefasst als Raumkurve mit Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\kappa(t) = \|c''(t)\| = \|(\tilde{c}''(t), 0)\| = \|\tilde{c}''(t)\| = |\tilde{\kappa}(t)|.$$

Definition 1.52 (Normalvektor). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{c''(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{\|c''(t_0)\|}$$

der Normalenvektor von c in t_0 .

Definition 1.53 (Binormalvektor). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$b(t_0) := c'(t_0) \times n(t_0)$$

der Binormalenvektor von c in t_0 .

Definition 1.54. Die Orthonormalbasis $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ heißt *begleitendes Dreibein* von c in t_0 .

Definition 1.55 (Windung). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Sei $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ das begleitende Dreibein von c in t_0 . Dann heißt

$$\tau(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0) \rangle$$

die *Windung* (oder auch die *Torsion*) von c in t_0 .

Beispiel. (Schraubenlinie). Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$ für $I = \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$ folgt $\|c'(t)\| = 1$ für alle t , d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Aus $c''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 0)$ folgt für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Spur von $[c]$ heißt die Schraubenlinie. Ihre Normalenvektor und bzw. Binormalenvektor sind

$$n(t) = \frac{1}{\kappa(t)}c''(t) = -(\cos t, \sin t, 0),$$

bzw,

$$b(t) = c'(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1).$$

Aus $n'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ gilt

$$\tau(t) = \langle n', b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proposition 1.56 (Frenet-Gleichungen der Raumkurve). $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Sei (c', n, b) das begleitende Dreibein von c . Sei τ die Windung. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Gleichung $(c')' = \kappa \cdot n$ ist gerade die Definition des Normalenvektors. Die zweite Spalte ergibt sich aus $\langle n', c' \rangle = \langle n, c' \rangle' - \langle n, c'' \rangle = -\kappa$, aus $\langle n', n \rangle = \frac{1}{2} \langle n, n \rangle' = 0$ und aus der Definition von τ , d.h., $\langle n', b \rangle = \tau$.

Wegen $\langle b', n \rangle = \langle b, c' \rangle' - \langle b, c'' \rangle = 0 - \kappa \langle b, n \rangle = 0$, $\langle b', n \rangle = \langle b, n \rangle' - \langle b, n' \rangle = -\tau$ und $\langle b', b \rangle = 0$, folgt die dritte Spalte. ■

Definition 1.57 (Die Schmiegeebene). $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Die von $c'(t)$ und $n(t)$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegeebene* von c in t .

Proposition 1.58 (Invarianz der Krümmung und Torsion der euklidischen Bewegung). $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung und A eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Dann ist $A \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und es gilt für die Krümmung bzw. die Windung von $A \circ c$:

$$\kappa_{A \circ c} = \kappa, \quad \tau_{A \circ c} = \tau.$$

Satz 1.59 (Hauptsatz der Raumkurventheorie). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen, mit $f > 0$. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit

$$\kappa = f, \quad \tau = g.$$

Diese Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltender euklidischer Bewegung, d.h., sind c_1 und c_2 zwei Lösungen, so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von \mathbb{R}^3 , so dass

$$c_2 = A \circ c_1.$$

2. KLASSISCHE FLÄCHENTHEORIE

2.1. Reguläre Flächen.

Definition 2.1 (Reguläre Fläche). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. S heißt eine *reguläre Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p im \mathbb{R}^3 gibt, falls es ferner eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass gilt

- (i) $F(U) = S \cap V$ und $F : U \rightarrow S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
- (ii) Die Jacobimatrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ Rang 2.

Bemerkung. a). Eine reguläre Fläche kann sich nicht selbstschneiden.

b). $D_u F(e_1)$ and $D_u F(e_2)$ sind unabhängig.

Definition 2.2 (Parametrisierung). Die Abbildung $F : U \rightarrow S \cap V$ aus Definition 2.1 oder auch als das Tripel (U, F, V) heißt *lokale Parametrisierung* von S um p . Die Menge $S \cap V$ heißt Koordinatenumgebung von p . Die Komponenten u^1 und u^2 von $u = (u^1, u^2)$ heißen dann auch Koordinaten des Punktes $F(u) \in S$ (bzgl. der Parametrisierung F).

Beispiel 2.3. 1). Affine Ebene.

Die affine Ebene durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$S = \{p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir kommen mit einer einzigen Parametrisierung aus. Setzt $V := \mathbb{R}^3$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y.$$

2). Funktionsgraphen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Der Funktionsgraph von f ist definiert durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Setzt $V := \mathbb{R}^3$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Dann gilt $F(U) = S = S \cap V$. F ist glatt und ihre Umkehrabbildung $G : S \rightarrow U$, $G(x, y, z) = (x, y)$ ist ebenfalls stetig. Also (i) ist erfüllt. Für (ii) hat die Funktion

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rang 2.

3). Die Kugel

$$S = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Setze $V := V_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Dann ist $\mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ der graph der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Wie Beispiel 2) definiert

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

und

$$F_3^+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}).$$

$F_3^+; U \rightarrow \mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ ist eine lokale Parametrisierung. Analog erhalten wir die Punkte aus $\mathbb{S}^2 \cap V_3^-$, $V_3^- := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} F_3^- : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F_3^-(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}). \end{aligned}$$

Und auch

$$\begin{aligned} V_1^\pm &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm x > 0\} \\ V_2^\pm &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm y > 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^\pm : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F_1^\pm(y, z) &= (\pm\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z) \\ F_2^\pm : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F_2^\pm(x, z) &= (x, \pm\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z). \end{aligned}$$

Jeder Punkt $p \in \mathbb{S}^2$ kommt in wenigstens einer der Mengen V_i^\pm vor, also ist \mathbb{S}^2 eine reguläre Fläche.

Proposition 2.4 (als Niveaumenge). Sei $V_0 \in \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir setzen

$$S := \{(x, y, z) \in V_0 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Falls für alle $p \in S$ gilt

$$\text{grad}f(p) \neq 0,$$

dann ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Sei $p := (x_0, y_0, z_0)^t \in S$. Wgene der Voraussetzung

$$\text{grad}f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)^t \neq (0, 0, 0)^t,$$

können wir oBdA annehmen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizierte Funktionen existiert es eine offene Umgebung $V \subset V_0$ von p , eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y))^t \mid (x, y)^t \in U\}.$$

Setzen wir $F : U \rightarrow V$ mit

$$F(x, y) := (x, y, g(x, y))^t,$$

so erhalten wir eine lokale Parametrisierung von S . ■

Beispiel. 4) Ellipsoid: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Setze $V_0 = \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Also

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Wir können überprüfen, dass

$$\text{grad}f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) \neq 0 \text{ für } (x, y, z) \in S.$$

Proposition 2.5. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann gibt es eine Umgebung V von p in \mathbb{R}^3 , so dass $S \cap V$ der Funktionsgraph einer glatten Funktion ist, die eine der folgenden drei Formen hat: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.

Beispiel. Der Doppelkegel.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

ist keine reguläre Fläche. Aber $S \setminus \{0\}$ ist eine reguläre Fläche.

Beweis. Fläche S ist Nullstellengebilde der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2, \end{aligned}$$

definiert. Der Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)^t$$

verschwindet nur in $(0, 0, 0)^t$. Also man kann mit Proposition 2.4 zeigen, dass $S \setminus \{0\}$ eine reguläre Fläche ist. Proposition 2.4 sagt darüber nicht aus, dass die Funktion f könnte für den Punkt $(0, 0, 0)^t$ ungeschickt gewählt sein.

Angemessen, dass S wäre eine reguläre Fläche. Dann gäbe es eine lokale Parametrisierung (F, U, V) um $p = (0, 0, 0)^t$. Setze $u_0 = F^{-1}((0, 0, 0)^t)$. OBdA können wir annehmen, dass U eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt u_0 ist. Da $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $p = (0, 0, 0)^t$, sind alle Vektoren $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ mit hinreichend kleiner Länge in V enthalten. Insbesondere liegen in $S \cap V$ Punkte $p_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ ($i = 1, 2$) mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$.

Seien $u_i := F^{-1}(p_i)$ ($i = 1, 2$). In U verbinden wir u_1 durch einen stetigen Weg c mit u_2 ohne durch u_0 zu laufen. Der Bildweg $F \circ c$, der p_1 und p_2 verbindet, muss aber, wegen des Zwischenwertsatzes, durch $p = (0, 0, 0)^t = F(u_0)$ laufen. Ein Widerspruch ■

Proposition 2.6. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\varphi(W) \subset S \cap V$. Dann ist φ als Abbildung von W nach \mathbb{R}^3 glatt genau dann, wenn $F^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ glatt ist.

Beweis.

” \Leftarrow ” $\Psi = F^{-1} \circ \varphi$ ist glatt, so ist $\varphi = F \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

” \Rightarrow ” Sei also $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt. Setze $g := \varphi(p) \in S \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(g) \in U$. Schreiben $F(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$. Weil das Differential $D_{u_0}F$ maximalen Rang hat, können wir o.E.d.A. annehmen, dass die 2×2 - Matrix $(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1, u^2)}, u_0)$ invertierbar ist. Definieren die Abbildung:

$$G : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G(u^1, u^2, t) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t)$$

Ihr Differential an der Stelle $(u^1, u^2, t) = (u_0^1, u_0^2, 0)$ ist:

$$D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist:

$$\det D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0)\right) \neq 0$$

Nach dem Umkehrsatz haben wir eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_0^1, u_0^2, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subset V$ von g , so dass $G|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$. Dann ist W_1 eine offene Umgebung von p . Für alle $p' \in W_1$ gilt:

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$$

denn $G(F^{-1} \circ \varphi(p'), 0) = F \circ F^{-1} \circ \varphi(p') = \varphi(p')$. Weil $G^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, ist $F^{-1} \circ \varphi$ als die Erste der Zweite Koordinatenfunktionen auch glatt auf W_1 . Nun ist W_1 eine offene Umgebung des beliebigen vorgegebenen Punktes p und die Aussage ist bewiesen. ■

Korollar 2.7. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien $(U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2)$ lokale Parametrisierungen von S . Dann ist $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ glatt.

Beweis. Anwendung von Prop.2.6. auf $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $\varphi = F_1$ und $(U, F, V) = (V_2, F_2, V_2)$ ■

Proposition 2.8. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- 1). Es gibt eine offene Umgebung V von p in \mathbb{R}^3 und eine Fortsetzung \tilde{f} von $f_{S \cap V}$ auf V , die um p glatt ist.
- 2). Es gibt eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

3). Für alle lokalen Parametrisierungen (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

Beweis.

a. "1. impliziert 3." Da F und \tilde{f} glatt um p sind, also ist auch

$$f \circ F = \tilde{f} \circ F$$

als Verkettung eine glatte Abbildung auf einer Umgebung von $F^{-1}(p)$

b. "3. impliziert 2." trivialerweise

c. "2. impliziert 1." Aus dem Beweis von Prop.2.6. wissen wir, dass

$$G(u^1, u^2, t) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t)$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir setzen:

$$g(u^1, u^2, t) := f \circ F(u^1, u^2) = f \circ G(u^1, u^2, 0)$$

g ist glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$. Setzen $\tilde{f} := g \circ G^{-1}$. \tilde{f} ist glatt um p und ist eine Fortsetzung von f , denn:

$$\tilde{f}|_{S \cap V} = f|_{S \cap V}$$

■

Definition 2.9. Gelten die äquivalenten Bedingungen 1). bis 3). aus Proposition 2.8, so nennen wir f glatt nahe p .

Definition 2.10. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Sei $p \in S_1$ und $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine Abbildung. We nennen f glatt nahe p , falls es eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) von S_1 um p gibt und eine lokale Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) von S_2 um $f(p)$ derart, dass

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \rightarrow V_2$$

nahe p glatt ist.

Bemerkung. Sind neben (U_1, F_i, V_i) auch $(\tilde{U}_1, \tilde{F}_i, \tilde{V}_i)$ lokale Parametrisierung von S_i , so ist mit $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ auch

$$\tilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{F}_1 = (\tilde{F}_2^{-1} \circ F_2) \circ (F_2^{-1} \circ f \circ F_1) \circ (F_1^{-1} \circ \tilde{F}_1)$$

glatt ist.

Definition 2.11. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f auch f^{-1} glatt sind. Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f : S_1 \rightarrow S_2$, dann heißen die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph.

Beispiele a). Sei $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c > 0$ ein Ellipsoid. Sei $S_2 = S^2$ die Sphäre. Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph. Als Diffeomorphismus nehmen wir z.B.

$$\begin{aligned} f : S_1 &\rightarrow S_2 \\ f(x, y, z) &= \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \end{aligned}$$

b). Sei $S_1 := \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in U\}$ der Graph einer C^∞ -Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $S_2 = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ das Ebenenstück U , aufgefasst als Fläche in \mathbb{R}^3 . Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph vermöge des Diffeomorphismus:

$$\begin{aligned} f : S_1 &\rightarrow S_2 & f(x, y, z) &= (x, y, 0) \\ f^{-1} : S_2 &\rightarrow S_1 & f(x, y, 0) &= (x, y, \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

2.2. Die Tangentialebene.

Definition 2.12 (Tangentialebene). Sei S eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Dann heißt

$$T_p S = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve} \\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } c'(0) = X \end{array} \right\}$$

die *Tangentialebene* von S in p . Die Elemente der Tangentialebene heißen *Tangentialvektoren*.

Proposition 2.13. Sei S eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Sei ferner (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p . Wir setzen $u_0 := F^{-1}(p) \in U$. Dann gilt

$$T_p S = \text{Bild}(D_{u_0} F) = D_{u_0} F(\mathbb{R}^2).$$

Beweis.

a. " \supset " Sei $X \in \text{Bild}(D_{u_0} F)$, d.h. es gibt ein $Y \in \mathbb{R}^2$ mit $X = D_{u_0} F(Y)$. Setze $c(t) := F(u_0 + tY)$. $c(t)$ ist eine glatte Kurve auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$c(0) = F(u_0) = p$$

und

$$c'(0) = \frac{d}{dt} F(u_0 + tY)|_{t=0} = D_{u_0} F(Y) = X.$$

Somit gilt $X \in T_p S$.

b. " \subset " Sei $X \in T_p S$, d.h. es gebe eine glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. O.E.d.A. können wir annehmen, dass c ganz in V verläuft. Gemäß Prop.2.6. ist

$$u := F^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$$

eine glatte (ebene) parametrisierte Kurve. Setze

$$Y := u'(0) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt

$$D_{u_0} F(Y) = \frac{d}{dt} (F \circ u)|_{t=0} = \frac{d}{dt} c|_{t=0} = X.$$

Somit gilt $X \in \text{Bild}(D_{u_0} F)$. ■

Beispiele.

1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene und $\{x_1, x_2\}$ eine Basis von E_0 . (U, F, V) $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, F : U \rightarrow V, F(u_1, u_2) = p_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2$ eine globale Parametrisierung von S . Für $p = F(u_0)$ ($u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$) gilt aus Proposition 2.13,

$$\begin{aligned} T_p S &= D_{u_0} F(\mathbb{R}^2) \\ &= \{t^1 x_1 + t^2 x_2 : (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= E_0. \end{aligned}$$

2. Sei S der Graph einer C^∞ -Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ d.h. $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ (U, F, V) $V = \mathbb{R}^3$ $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ eine globale Parametrisierung. Sei $p = F(u_0) = (u_0^1, u_0^2, f(u_0^1, u_0^2))$. Gemäß Proposition 2.13,

$$\begin{aligned} T_p S &= D_{u_0} F(\mathbb{R}^2) \\ &= \mathbb{R}(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)) \oplus \mathbb{R}(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)). \end{aligned}$$

Korollar 2.14. Da $D_{u_0} F$ Rang 2 hat, bildet $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Untervektorraum.

Proposition 2.15. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sei $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Es gelte $\text{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Dann steht für $p \in S$ der Gradient von f senkrecht auf die Tangentialebene

$$T_p S = \text{grad} f(p)^\perp.$$

Beweis. Sei $X \in T_p S$, d.h. es gebe eine glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Da c in S verläuft, gilt $(f \circ c)(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Beim Ableiten haben wir:

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} = \langle \nabla f(p), c'(0) \rangle = \langle \nabla f(p), X \rangle.$$

Also $X \perp \nabla f(p)$. Wir haben somit gezeigt, dass $T_p S \subset \nabla f(p)^\perp$. Da beide Untervektorräume $T_p S$ und $\nabla f(p)^\perp$ des \mathbb{R}^3 Dimension 2 haben folgt:

$$T_p S = \nabla f(p)^\perp.$$

■

Beispiel. Die Sphäre wird beschrieben durch $S^2 = f^{-1}(0)$ wobei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Man kann berechnen: $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$. Die Tangentialebene $T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), v \rangle = 0\}$

Definition 2.16 (Differential). Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine glatte Abbildung, und sei $p \in S_1$. Das *Differential* von f in p ist die Abbildung

$$df : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2,$$

die gegeben ist durch folgende Vorschrift: Zu $X \in T_p S_1$ wähle eine glatte parametrisierte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$ und setze

$$d_p f(X) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c) \in T_{f(p)} S_2.$$

Proposition 2.17. Durch Definition 2.16 ist das Differential $d_p f$ wohldefiniert, d.h., $d_p f(X)$ hängt nur von X ab, nicht aber von der speziellen Wahl der Kurve c . Ferner ist das Differential $d_p f$ linear.

Beweis. Sei (U_1, F_1, V_1) (bzw. (U_2, F_2, V_2)) eine lokale Parametrisierung von S_1 um p (bzw. von S_2 um $f(p)$). Nach eventueller Verkleinerung von U_1 und V_1 können wir annehmen, dass $f(S \cap V_1) \subset V_2$. Setze

$$\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

und $u_0 := F_1^{-1}(p) \in U_1$. Zur Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$ setzen wir

$$u := F_1^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_1.$$

Wie im Beweis von Proposition 2.2 haben wir $D_{u_0}F_1(u(0)) = X$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_p f(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ F_1 \circ u)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F_2 \circ \tilde{f} \circ u)|_{t=0} \\ &= D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f})(u'(0)) = D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f}) \circ (D_{u_0}F_1)^{-1}(X). \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Beweis hat gezeigt, dass das differential $d_p f$ bzgl. der lokalen Parametrisierungen (U_1, F_1, V_1) und (U_2, F_2, V_2) durch die jacobimatrix $D_{u_0}\tilde{f}$ beschrieben wird. Genauer gesagt, es kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} S_2 \\ D_{u_0} F_1 \uparrow \cong & & \cong \uparrow D_{\tilde{f}(u_0)} F_2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D_{u_0} \tilde{f}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Proposition 2.18 (Kettenregel). *Seien S, S', S'' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S', g : S' \rightarrow S''$ Abbildungen. Sei $p \in S$. Ist f differenzierbar in p und g differenzierbar in $f(p)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in p und es gilt*

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f.$$

Beweis. Sei (U, F, V) bzw. $(U', F', V'), (U'', F'', V'')$ eine lokale Parametrisierung von S um p bzw. von S' um $f(p)$, von S'' um $g \circ f(x)$, so dass $f \circ F(U) \subset (S' \cap V')$ und $F'(U') \subset (S'' \cap V'')$. Dann gilt:

$$(F'')^{-1} \circ (g \circ f) \circ F = \underbrace{(F'')^{-1} \circ g \circ (F')}_{C^\infty} \circ \underbrace{(F')^{-1} \circ f \circ F}_{C^\infty}$$

Wie im Beweis von Prop. 2.17 haben wir:

$$\begin{aligned} d_p(g \circ f) &= DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ (g \circ f) \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &= DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F' \circ (F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &\stackrel{K.}{=} DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F') \circ D((F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &= \underbrace{DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F') \circ (DF')^{-1}}_{d_{f(p)}g} \circ \underbrace{(DF') \circ D((F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1}}_{d_p f} \\ &= d_{f(p)}g \circ d_p f \end{aligned}$$

■

2.3. Die erste Fundamentalform (Metrik).

Definition 2.19 (die erste Fundamentalform). Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Sei $T_p S$ die Tangentialebene von S in p . Die *erste Fundamentalform* (oder *Metrik*) von S in p ist definiert durch

$$I_p(X, Y) = g_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Bemerkung. Nach Definition ist g_p die Einschränkung des kanonischen Skalarprodukts auf T_p ; insbesondere g_p ist positiv-definite symmetrische Bilinearform auf $T_p S$.

Definition 2.20 (die Matrixdarstellung von der ersten Fundamentalform). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Sind e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^2 , so bilden $D_u F(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$ und $D_u F(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$, $u = F^{-1}(p)$, eine Basis von $T_p S$. Bezüglich dieser Basis ist die Matrixdarstellung von g_p dann gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= g_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i, j \leq 2$.

Beispiel. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die von den Vektoren X und Y aufgespannt wird durch den Punkt p_0 .

$$F(u^1, u^2) = p_0 + u^1 X + u^2 Y$$

Die erste Fundamentalform bzgl. dieser Parametrisierung

$$\begin{aligned} g_{11}(u^1, u^2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1, u^2), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1, u^2) \right\rangle = \langle X, X \rangle \\ g_{12}(u^1, u^2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1, u^2), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, u^2) \right\rangle = \langle X, Y \rangle \\ g_{21}(u^1, u^2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, u^2), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1, u^2) \right\rangle = \langle Y, X \rangle \\ g_{22}(u^1, u^2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, u^2), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1, u^2) \right\rangle = \langle Y, Y \rangle \end{aligned}$$

Ist S z.B. die x - y -Ebene und sind (u^1, u^2) kartesische Koordinaten, d.h. $p_0 = 0$, $X = e_1$ und $Y = e_2$, so wird die erste Fundamentalform durch die Matrix

$$(g_{ij}(u))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Man kann durch die x - y -Ebene durch Polarkoordinaten parametrisieren.

$$\begin{aligned} \tilde{F} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \tilde{F}(r, \varphi) &= (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0). \end{aligned}$$

Die erste Fundamentalform berechnet sich nun zu:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{11}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \\ \tilde{g}_{12}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \tilde{g}_{21}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \tilde{g}_{22}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = r^2.\end{aligned}$$

Die erste Fundamentalform bzgl. Polarkoordinaten ist:

$$(\tilde{g}_{ij}(r, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel. (Zylinderfläche). Wir betrachten Zylinderfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wir parametrisieren sie durch

$$\begin{aligned}F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(\varphi, h) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, h).\end{aligned}$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich bzgl. der Koordinaten $(u^1, u^2) = (\varphi, h)$:

$$\begin{aligned}g_{11}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \\ g_{12}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ g_{21}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ g_{22}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi, h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.\end{aligned}$$

Also die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie die von der Ebene.

Beispiel. Wir berechnen die erste Fundamentalform der Sphäre

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

in Polarkoordinaten $(u^1, u^2) = (\theta, \varphi)$ ergibt das insgesamt:

$$\begin{aligned} F : \quad & \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ (g_{ij}(\theta, \varphi))_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemma 2.21. Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ lokale Parametrisierungen um p , und $g_{ij}(u)_{ij}$ bzw. $(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}))_{ij}$ die lokale Darstellung von der ersten Fundamentalform bzgl. (U, F, V) bzw. $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ wie in Definition 2.20. Setze

$$\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F : F^{-1}(F(U) \cap \tilde{F}(\tilde{U})) \rightarrow \tilde{F}^{-1}(F(U) \cap \tilde{F}(\tilde{U}))$$

wie in Korollar 2.7. Dann gilt

$$g_{ij}(u) = \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j} \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)) \quad (\tilde{u} = \varphi(u)).$$

In Matrixschreibweis lautet diese Gleichung

$$(g_{ij}(u))_{ij} = (D_u \varphi)^t \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u)))_{kl} \cdot D_u \varphi.$$

Beweis. Nach der Kettenregel haben wir:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= I\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u)\right) \quad (F = \tilde{F} \circ \varphi) \\ &= I\left(\frac{\partial(\tilde{F} \circ \varphi)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial(\tilde{F} \circ \varphi)}{\partial u^j}(u)\right) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} I\left(\sum_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u), \sum_l \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u)\right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) I\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u))\right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)). \end{aligned}$$

■

2.4. Normalenfelder und Orientierbarkeit.

Definition 2.22 (Normalenfeld). Sei S eine reguläre Fläche. Ein *Normalenfeld* auf S ist eine Abbildung

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

so dass $N(p) \perp T_p S$ für $p \in S$. Ein Normalenfeld auf S heißt *Einheitsnormalenfeld*, falls zusätzlich

$$\|N(p)\| = 1$$

gilt für alle $p \in S$.

Bemerkung. • Mit N auch $-N$ ein (Einheits-)Normalenvektor ist.
• Stetige Einheitsnormalenfeld kann, muss es aber auf einer reguläre Fläche nicht geben.

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x - y -Ebene in \mathbb{R}^3 . Dann ist $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$ ein konstantes Einheitsnormalenfeld.

Beispiel. Sei $S = S^2$. Dann erhalten wir ein Einheitsnormalenfeld durch $N = Id$, d.h. $N(x, y, z) = (x, y, z)$.

Beispiel. Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Dann ist durch $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ ein Einheitsnormalenfeld definiert.

Beispiel. (Möbiusband). Das Möbiusband.

Definition 2.23 (orientierbare Fläche). Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *orientierbar*, falls es ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld auf S gibt.

Bemerkung. Reguläre Flächen S im Kleinen sind stets orientierbar.

Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Sei $p \in S$ und $u = F^{-1}(p)$.

$\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) = D_u F(e_1)$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2} = D_u F(e_2)$ sind 2 Tangentialvektoren. Definiere

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\|}$$

Definition 2.24 (Orientierung). Eine *Orientierung* auf einer orientierbaren regulären Fläche besteht aus der Wahl eines stetigen Einheitsnormalenfeld auf der Fläche.

Eine orientierbare Fläche zusammen mit einer Orientierung nennt man *orientierte Fläche*.

Satz 2.25. Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn eine Familie $(U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ von lokalen Parametrisierung von S so existiert, dass

- $\cup_{i \in I} (S \cap V_i) = S$ (die $V_i \cap S$'s überdecken S) und die $V_i \cap S$'s sind zusammenhängend,

- für alle $i, j \in I$ mit $S \cap V_i \cap V_j \neq \emptyset$ und für alle $u \in F_i^{-1}(S \cap V_i \cap V_j)$ gilt

$$\det(D_u(F_j^{-1} \circ F_i)) > 0.$$

Beweis. Für die lokale Parametrisierung (U_i, F_j, V_i) sei $\{D_{F_i^{-1}(p)}F(e_1), D_{F_i^{-1}(p)}F(e_2)\}$ die Basis von T_pS für $p \in V_i \cap S$. Sei

$$N_i = \frac{D_{F_i^{-1}(p)}F(e_1) \times D_{F_i^{-1}(p)}F(e_2)}{\|D_{F_i^{-1}(p)}F(e_1) \times D_{F_i^{-1}(p)}F(e_2)\|}.$$

Behauptung: Für $p \in S \cap V_i \cap V_j$ mit $u = F_i^{-1}(p)$

$$N_i(p) = N_j(p) \Leftrightarrow \det(D_u(F_j^{-1} \circ F_i)) > 0.$$

“ \Rightarrow ” Angenommen S ist orientierbar. Sei $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges (glattes) Einheitsnormalenfeld auf S . Sei $p \in S$ und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p mit U zusammenhängend (bis auf Einschränkung von U ist dies immer mgl). Aus Bemerkung vor der Definition 2.24 gilt dann: entweder:

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), N(F(u))\right) > 0 \quad \forall u \in U \quad \text{oder}$$

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), N(F(u))\right) < 0 \quad \forall u \in U$$

Im ersten Fall lassen wir (U, F, V) unverändert. Im zweiten Fall ersetzen wir (U, F, V) durch $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ wobei $\tilde{U} := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^2, u^1) \in U\}$, $\tilde{F}(u^1, u^2) := F(u^2, u^1)$ und $\tilde{V} := V$. Es ist klar, dass $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ eine lokale Parametrisierung von S um p mit $F(\tilde{U}) = F(U)$ und

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^1}(u), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^2}(u), N(\tilde{F}(u))\right) &= \det\left(\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^2, u^1), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^2, u^1), N(F(u^2, u^1))\right) \\ &= -\det\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u^2, u^1), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^2, u^1), N(F(u^2, u^1))\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” Klar. ■

2.5. Die zweite Fundamentalform. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N . Aufgefasst als Abbildung zwischen Flächen, nämlich $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, heißt N auch *Gauß-Abbildung*.

Definition 2.26 (Die Weingarten-Abbildung). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $p \in S$. Die *Weingarten-Abbildung* von S in p wird definiert durch

$$\begin{aligned} W_p : T_p S &\rightarrow T_p S \\ W_p(X) &= -d_p N(X). \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Differential ist $d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$. Nun ist $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = N(p)^\perp = T_p S$.

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x - y -Ebene, $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ konstant. Also

$$W_p = 0 \quad \forall p \in S.$$

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^2$. Sei N das äußere Einheitsnormalenfeld, $N(p) = p$. Dann ist

$$W_p = -Id : T_p \mathbb{S}^2 \rightarrow T_p \mathbb{S}^2.$$

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder. $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. In einem Punkt $p = (x, y, z) \in S$ wird die Tangentialebene $T_p S$ aufgespannt durch die Basisvektoren $(-y, x, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Wählen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (x, y, z + t) \quad \text{und} \\ c_2(t) &= (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z), \end{aligned}$$

wobei $(\cos t_0, \sin t_0) = (x, y)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_p(0, 0, 1) &= -d_p N(0, 0, 1) = -\frac{d}{dt} N(c_1(t))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} (x, y, 0)|_{t=0} = 0, \\ W_p(-y, x, 0) &= -d_p N(-y, x, 0) = -\frac{d}{dt} N(c_2(t))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), 0)|_{t=0} \\ &= (\sin t_0, -\cos t_0, 0) = -(-y, x, 0) \end{aligned}$$

In der Basis $(-y, x, 0)$ und $(0, 0, 1)$ hat W_p also als Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.27. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit der Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$, $p \in S$. Dann ist W_p selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform, d.h.,

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y)$$

für alle $X, Y \in T_p S$.

Beweis. Sei N das Einheitsnormalenfeld von S und $W_p = -d_p N$. Wähle eine lokale Parametrisierung (U, F, V) um p und setze $u := F^{-1}(p)$. Seien $X_i := D_u F(e_i) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u)$ für $i = 1, 2$. Da N überall senkrecht auf S steht, gilt:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \equiv 0$$

Beim Ableiten dieser Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), \frac{d}{dt} N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{K}{=} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle.$$

Nach dem Satz von Schwarz haben wir:

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = I_p(X_j, W_p(X_i)).$$

Da $\{X_1, X_2\}$ eine Basis von $T_p S$ und $(X, Y) \rightarrow I_p(W_p(X), Y)$ bilinear ist, gilt die Behauptung. \blacksquare

Definition 2.28 (Die zweite Fundamentalform). Die zur Weingarten-Abbildung gehörige Bilinearform heißt *zweite Fundamentalform* (der Fläche S in p):

$$II_p(X, Y) := I_p(W_p(X), Y), \quad X, Y \in T_p S.$$

Definition 2.29 (Die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform). Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S (orientierter regulärer Fläche). Dann wird für jedes $u \in U$ die 2×2 matrix $(h_{ij}(u))_{ij}$ definiert durch

$$\begin{aligned} h_{ij}(u) &:= II_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) \\ &= I_p(W_p(D_u F(e_i)), D_u F(e_j)) \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle. \end{aligned}$$

Beispiel. Sei S der Graph einer glatten Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Auf S kann das folgende glatte Einheitsnormalenfeld definiert werden:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u^1}(u) \\ -\frac{\partial f}{\partial u^2}(u) \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $p = F(u) \in S$ und $F(u) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$. Wir haben

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u))$$

und somit

$$h_{ij}(u) \underset{n.Def.}{=} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u) \right)_{ij}.$$

2.6. Die Krümmung. Nach Proposition 2.27 ist die Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ stets selbstadjungiert. Aus linear Algebra können wir eine Orthonormalbasis X_1, X_2 von $T_p S$ finden, so dass

$$W_p(X_i) = \kappa_i \cdot X_i, \quad i = 1, 2.$$

X_i sind die Eigenvektoren von W_p und κ_i die Eigenwerte von W_p .

Definition 2.30 (Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen). Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen *Hauptkrümmungen* von S im Punkt p . Die zugehörige Eigenvektoren $\pm X_1$ und $\pm X_2$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

Definition 2.31 (Normalkrümmung). Die *Normalkrümmung* in Richtung X ist definiert durch

$$\kappa_{nor} = II(X, X).$$

Lemma 2.32. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $p \in S$. Sei $X \in T_p S$ mit $g_p(X, X) = \|X\|^2 = 1$ und setze $E := p + \text{Span}\{X, N(p)\} \subset \mathbb{R}^3$. Die Ebene $\text{Span}\{X, N(p)\}$ trage die Orientierung der Basis $\{X, N(p)\}$. Sei, für ein hinreichende kleines $\varepsilon > 0$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E \cap S$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Dann gilt

$$II_p(X, X) = \kappa(0),$$

wobei κ die Krümmung von c (als ebene Kurve) ist.

Beweis. Bemerke zuerst, dass eine solche nach Bogenlänge parametrisierte Kurve c existiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} I_p(X, X) &= \langle W_p(X), X \rangle = -\langle d_p N(X), X \rangle \\ &= -\left\langle \frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0}, X \right\rangle = -\left\langle \frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0}, c'(0) \right\rangle \\ &= -\frac{d}{dt} \underbrace{\langle N \circ c, c' \rangle}_{=0} \Big|_{t=0} + \langle N \circ c(0), c''(0) \rangle, \\ &= \kappa(0) \langle N \circ c(0), n(0) \rangle \end{aligned}$$

wobei $n : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{Span}\{X, N(p)\}$ das Normalenfeld zu c ist. Aber $c'(0) = X$ und $\{X, N(p)\}$ ist p.o.n.B. von $\text{Span}\{X, N\}$. Also $n(0) = N(p)$ und somit

$$I_p(X, X) = \kappa(0) \langle N \circ c(0), N(p) \rangle = \kappa(0). \quad \blacksquare$$

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x - y -Ebene. $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ und $W_p = 0, \forall p \in S$. Also $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre. Dann ist für das innere Einheitsnormalenfeld die Weingarten-Abbildung $W = id$. Somit sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder. $p = (x, y, z)$. Wie wir gesehen haben, hat die Weingarten-Abbildung W_p bzgl. des inneren Einheitsnormalenfelds und der Basis $X_1 = (-y, x, 0)$ und $X_2 = (0, 0, 1)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das heisst gerade, dass X_1 und X_2 Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sind.

Beispiel. Sei S der Graph einer glatten Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Auf S kann das folgende glatte Einheitsnormalenfeld definiert werden:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u^1}(u) \\ -\frac{\partial f}{\partial u^2}(u) \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $p = F(u) \in S$ und $F(u) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$. Wir haben

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u) \right)$$

und somit

$$h_{ij}(u) \stackrel{\text{n.Def.}}{=} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \right\rangle = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u) \right)_{ij}.$$

Definition 2.33 (Krümmungslinie). Sei S eine reguläre Fläche, sei $c : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parameterisierte Kurve. Falls $c'(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heisst c *Krümmungslinie*.

Beispiel. Auf den Zylinder $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sind die Krümmungslinien horizontale Kreislinien oder vertikale Geraden (oder Stücke davon).

Definition 2.34 (die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung). Sei S eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p . Dann ist

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die *Gauß-Krümmung* von S in p . Ferner heisst

$$H(p) := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \text{Spur}(W_p)$$

die *mittlere Krümmung* von S in p .

Definition 2.35. Sei S eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Man nennt p

- i) *elliptisch*, falls $K(p) > 0$.
- ii) *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$,
- iii) *parabolisch*, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$,
- iv) *Flachpunkt*, falls $W_p = 0$, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Bemerkung zur Orientierung. Kehrt man auf einer orientierbaren regulären Fläche die Orientierung um, d.h. ersetzt man N durch $-N$, so geht W_p in $-W_p$ über. Daher werden κ_1 und κ_2 durch $-\kappa_1$ und $-\kappa_2$ ersetzt. Die Eigenvektoren von W_p und damit die Hauptkrümmungsrichtungen bleiben dieselben. $H(p)$ geht auch in $-H(p)$ über, aber $K(p)$ bleibt unverändert. Somit die Eigenvektoren, die Hauptkrümmungsrichtungen und Gauß-Krümmung auch für nichtorientierbare Flächen definiert, die Hauptkrümmungen und die mittlere Krümmung dagegen nur bis auf das Vorzeichen.

Das *mittlere Krümmungsfeld* definiert durch

$$\mathcal{H} := H \cdot N$$

bleibt auch unverändert.

Beispiel. Die Ebene hat $W_p = 0$ für alle p . Daher sind alle Punkte Flachpunkte. Es ist $K = H = 0$.

Beispiel. Für die Kugel $S = \mathbb{S}^2$ mit der durch das innere Einheitsnormalenfeld gegebenen Orientierung gilt $W_p = id \quad \forall p \in S$, also $K = H = 1$. Somit sind alle Punkte elliptisch. Das mittlere Krümmungsfeld ist $\mathcal{H}(p) = -p$.

Beispiel. Für den Zylinder $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ haben wir $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 1$. Also gilt $K \equiv 0$ (wie für die Ebene!) und $H = \frac{1}{2}$. Alle Punkte sind parabolisch.

Beispiel. Das hyperbolische Paraboloid (oder die Sattelfläche)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

ist der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(x, y) &= y^2 - x^2 \quad \text{und somit} \\ \nabla \varphi &= (-2x, 2y) \\ \Rightarrow N(p) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \\ X_1 &= \frac{\partial F}{\partial X_1} = (1, 0, -2x) \quad X_2 = \frac{\partial F}{\partial X_2} = (0, 1, 2y) \\ h_{ij}(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ g_{ij}(u) &= \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also $K = -4$ und $H = 0$.

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(u) &= I_p(W_p(D_u F(e_i)), D_u F(e_j)) \\
 &= \sum_{k=1}^2 W_i^k(u) I(D_u F(e_k), D_u F(e_j)) \\
 &= \sum_{i=1}^2 W_i^k(u) g_{kl}(u) \\
 \text{wobei } (W_i^k) &= (h_{ij})(g_{ki})^{-1} \\
 K &= \frac{\det(h_{ij})_{ij}}{\det(g_{ij})_{ij}} \\
 H &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left((h_{ij})_{ij} (g_{ij})_{ij}^{-1} \right).
 \end{aligned}$$

Satz 2.36 (Geometrische Interpretation der Krümmungen). *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von $T_p S$. Sei N glattes Einheitsnormalenfeld auf S , definiert in einer Umgebung des Punktes p , so dass $(X_1, X_2, N(p))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 bilden. Dann gilt es eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S um p , so dass*

- (i) $(0, 0) \in U$ und $F(0, 0) = p$,
- (ii) $g_{ij}(0, 0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$,
- (iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, 0) = 0$, $i, j, k = 1, 2$,
- (iv) $F(u) - p = u^1 X_1 + u^2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(0, 0) u^i u^j \cdot N(p) + O(\|u\|^3)$.

Beweis.

a. Sei $x_0 \in U_1$ der Punkt für den $F_1(x_0) = p$. Setze $V_2 := V_1$, $U_2 := U_1 - x_0$ und $F_2 : U_2 \rightarrow V_2 \cap S$ $F_2(x) = F_1(x + x_0)$. Nun bekommen wir eine neue Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) mit $F_2(0, 0) = p$.

b. Seien $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^2$ so, dass $D_{(0,0)} F_2(Y_j) = X_j$ $j = 1, 2$. Wählen wir eine lineare Transformation A , so dass $A(e_j) = Y_j$ $j = 1, 2$. Setze $V_3 := V_2$, $U_3 := A^{-1}(U_2)$ und $F_3 := F_2 \circ A$. Dann ist (U_3, F_3, V_3) eine lokale Parametrisierung von S um p mit $F_3(0) = p$ und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0, 0) &= D_{(0,0)} F_3(e_i) = D_{(0,0)}(F_2 \circ A)(e_i) \\
 &= (D_{(0,0)} F_2 \circ A)(e_i) = D_{(0,0)} F_2(Y_i) = X_i.
 \end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$g_{ij}^{(F_3)}(0, 0) = \left\langle \frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0, 0), \frac{\partial F_3}{\partial u^j}(0, 0) \right\rangle = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}.$$

c. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von F_3 um $(0, 0)$ und bezeichnen

die Koordinaten mit (v^1, v^2) .

$$\begin{aligned}
F_3(v^1, v^2) - p &= \frac{\partial F_3}{\partial v^1}(0)v^1 + \frac{\partial F_3}{\partial v^2}(0)v^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0)v^i v^j + O(\|v\|^3) \\
&= v^1 X_1 + v^2 X_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0, 0), X_k \rangle X_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0, 0), N(p) \rangle N(p) + O(\|v\|^3).
\end{aligned}$$

d. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Psi : U_3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
\Psi(v^1, v^2) &= \begin{pmatrix} v^1 + \frac{1}{2} \sum v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_1 \rangle \\ v^2 + \frac{1}{2} \sum v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_2 \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
\Psi(0, 0) &= (0, 0) \\
\text{und } D_{(0,0)}\Psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es Umgebungen $U'_3 \subset U_3$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$, so dass $\Psi : U'_3 \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist. Durch Verkleinern $V'_3 \subset V_3$ und Einschränken $F'_3 = F_3|_{U'_3}$ erhalten wir eine weitere lokale Parametrisierung (U'_3, F'_3, V'_3) von S um p . Nun setzen wir $F := F'_3 \circ \Psi^{-1}$ und $V := V'_3$. Die Parametrisierung (U, F, V) besitzt alle Eigenschaften i) - iv).

Zu i): $F(0) = F'_3(\Psi^{-1}(0)) = F'_3(0, 0) = F_3(0) = p$.

Zu iv): Mit der Abkürzung

$$u^k := v^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_k \rangle$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(u^1, u^2) - p &= F(\Psi(v^1, v^2)) - p \\
&= F_3(v^1, v^2) - p \\
&= \sum_{k=1}^2 \left\{ v^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_k \right\rangle \right\} X_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v^i v^j \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), N(p) \right\rangle N(p) + O(\|v\|^3) \\
&= \sum_{k=1}^2 u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 v^i v^j h_{ij}^{(F_3)}(0) N(p) + O(\|v\|^3).
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir $h_{ij}^{(F_3)}(0) = \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), N(p) \right\rangle$. Wegen

$$\Psi(0, 0) = 0, \quad D_{(0,0)}\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gilt auch

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(0, 0) &= 0 \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2} D_{(0,0)}(\Psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und somit

$$v^j = u^j + O(\|u\|^2).$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
F(u^1, u^2) - p &= \sum_{k=1}^2 u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(u^i u^j + O(\|u\|^3) \right) h_{ij}^{(F_3)}(0) N(p) + O(\|u\|^3) \\
&= \sum_{k=1}^2 u^k X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 u^i u^j h_{ij}^{(F_3)}(0) N(p) + O(\|u\|^3). \quad (*)
\end{aligned}$$

Ableiten von (*) erhalten wir

$$h_{ij}^{(F)}(0) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(0), N(p) \right\rangle = \left\langle h_{ij}^{(F_3)}(0) N(p), N(p) \right\rangle = h_{ij}^{(F_3)}(0). \quad (**)$$

Einsetzen von (**) in (*) liefert iv).

Zu ii) und iii): Wegen iv) gilt

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u) = X_i + \sum_{j=1}^2 u^j h_{ij}(0) N(p) + O(\|u\|^2).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
g_{ij}(u) &= \langle X_i + \sum_{k=1}^2 u^k h_{ik}(0)N(p) + O(\|u\|^2), \\
&\quad X_j + \sum_{l=1}^2 u^l h_{jl}(0)N(p) + O(\|u\|^2) \rangle \\
&= \langle X_i, X_j \rangle + \sum_{k=1}^2 u^k h_{ik}(0) \underbrace{\langle X_i, N(p) \rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{l=1}^2 u^l h_{jl}(0) \underbrace{\langle X_i, N(p) \rangle}_{=0} + O(\|u\|^2) \\
&= \delta_{ij} + O(\|u\|^2)
\end{aligned}$$

und ii) und iii). ■

Korollar 2.37. *Jede reguläre Fläche kann lokal als Graph über ihre Tangentialebene dargestellt werden.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation drehen und verschieben wir die Fläche im \mathbb{R}^3 so, dass $p = 0$ und die Tangentialebene $T_p S$ gerade von den ersten beiden Einheitsvektoren e_1 und e_2 aufgespannt wird. Nach Satz 2.36 haben wir eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S um p mit

$$F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 u^i u^j h_{ij}(0, 0)) + O(\|u\|^3).$$

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ die Orthogonalprojektion. Wegen

$$\pi \circ F(u^1, u^2) = (u^1, u^2) + O(\|u\|^3)$$

gilt

$$D_{(0,0)}(\pi \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Umkehrsatz existiert eine glatte Abbildung $\varphi : \tilde{U} \subset T_p S \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\pi \circ F \circ \varphi = id$. Dann gilt $F(\varphi(v^1, v^2)) = (v^1, v^2, (F \circ \varphi)^3(v^1, v^2))$, d.h. S ist nahe p genau der Graph der 3. Komponentenfunktion von $F \circ \varphi$. ■

Wenn wir Terme dritter Ordnung vernachlässigen, können wir die reguläre Fläche S in der Nähe eines Punktes $p \in S$ über der Tangentialebene $T_p S$ als Graph der Funktion

$$(u^1, u^2) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 u^i u^j h_{ij}(0, 0)$$

angenähert darstellen.

1. Fall: Sei $K(p) > 0$. Dann ist $(h_{ij}(0))_{ij}$ positiv oder negativ definit.
2. Fall: Sei $K(p) < 0$. Dann ist $(h_{ij}(0))_{ij}$ indefinit. Somit wird S nahe p durch eine Sattelfläche approximiert.
3. Fall: p ist parabolisch. Nahe p sieht S wie die Zylinderfläche über einer Parabel aus.
4. Fall: p ist Flachpunkt $k_1(0) = k_2(0) = 0$. Dann ist $(h_{ij})(0, 0) = 0$ für alle $i, j = 1, 2$, und somit sieht S wie eine Ebene aus.

Satz 2.38. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche. Dann besitzt S einen Punkt p mit

$$K(p) > 0.$$

Beweis.

Da $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche ist, ist S insbesondere beschränkt und somit existiert ein $R > 0$, so dass

$$S \subset \overline{B}(0, R) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq R\}.$$

a. Wählen R_0 so, dass

$$R_0 := \inf\{R : S \subset \overline{B}(0, R)\}$$

und setzen $\mathbb{S}^2(R_0) = \partial\overline{B}(0, R_0)$. Es gilt $S \subset \overline{B}(0, R_0)$. Wir behaupten: $S \cap \mathbb{S}^2(R_0) \neq \emptyset$, denn: Angenommen, es wäre falsch. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass der Abstand

$$0 < \varepsilon < \text{dist}(S, \mathbb{S}^2(R_0)) = \inf\{\|x - y\| : x \in S, y \in \mathbb{S}^2(R_0)\}.$$

Dann wäre aber $S \subset \overline{B}(0, R_0 - \varepsilon)$ im Widerspruch zur Minimalität von R_0 . Also existiert $p \in S \cap \mathbb{S}^2(R_0)$.

b. Wir behaupten, dass S und $\mathbb{S}^2(R_0)$ in p dieselbe Tangentialebene haben, d.h. $T_p S = T_p \mathbb{S}^2(R_0)$. Denn: $\forall X \in T_p S \quad \exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S : c(0) = p$ & $c'(0) = X$. Wegen $S \subset \overline{B}(0, R_0)$ gilt

$$R_0 = \|c(0)\|^2 = \max_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \|c(t)\|^2.$$

Es folgt $(\|c\|^2)'(0) = 0$, d.h. $\langle c'(0), c(0) \rangle = 0$. Also $\langle X, p \rangle = 0$. Wegen $T_p \mathbb{S}^2(R_0) = p^\perp$, gilt $X \in T_p \mathbb{S}^2(R_0)$. Somit $T_p S \subset T_p \mathbb{S}^2(R_0)$. Wegen $\dim T_p S = \dim T_p \mathbb{S}^2(R_0)$ gilt die Behauptung $T_p S = T_p \mathbb{S}^2(R_0)$.

c. Sei $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$. Wir behaupten, dass die Normalkrümmung $II(X, X)$ von X größer gleich $\frac{1}{R_0} > 0$ oder kleiner gleich $-\frac{1}{R_0}$ ist, d.h. $|II(X, X)| \geq \frac{1}{R_0}$. Denn: Sei E eine Ebene, aufgespannt von $N(p)$ und X . Betrachten die Schnitte E mit S und $\mathbb{S}^2(R_0)$. Dann sehen wir, dass $E \cap S$ immer im Inneren der Kreislinie $E \cap \mathbb{S}^2(R_0)$ liegt und diese in p berührt. Wir haben schon bewiesen, dass die Normalkrümmung $|II(X, X)| = |k(0)|$,

wobei k die Krümmung von einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Nach Hausaufgabe haben wir

$$|k(0)| \geq \frac{1}{R_0}.$$

d. Also die Weingarten-Abbildung, als eine Matrix: $W - \frac{1}{R_0}Id \geq 0$ oder $W + \frac{1}{R_0}Id \leq 0$, d.h. $W - \frac{1}{R_0}Id$ ist positiv definit oder $W + \frac{1}{R_0}Id$ ist negativ definit. Es folgt

$$K = \det W \geq \frac{1}{R_0^2} > 0. \quad \blacksquare$$

Korollar 2.39. Sei S eine kompakte reguläre Fläche, sei $q \in \mathbb{R}^3$, sei $p \in S$ ein Punkt mit maximalem (oder minimalen) Abstand von q . Dann ist $q - p$ senkrecht auf $T_p S$, d.h.

$$q - p \perp T_p S.$$

Beweis. Übung. ■

In Koordinaten lassen sich K und H wie folgt ausdrücken:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ij} h_{ij} g^{ij} = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} (h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}).$$

2.7. Flächeninhalten und Integration auf Flächen. Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Zunächst betrachten wir nur Funktionen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb des Koordinatenbereiches verschwinden, d.h., $f|_{S-V} \equiv 0$.

Definition 2.40 (Lebesque-Integrierbarkeit). Eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{S-V} = 0$ heißt (Lebesque-)integrierbar, falls die Funktion

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u^1, u^2) &\longmapsto f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))}, \end{aligned}$$

(Lebesque-)integrierbar ist. Dabei (g_{ij}) ist die Matrixdarstellung von der ersten Fundamentalform. Der Wert des Integrals ist

$$\int_S f dA := \int_U f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2.$$

Man nennt den formalen Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

das *Flächenelement*.

$\det(g_{ij})$ heißt auch *Gramsche Determinante* und gibt die infinitesimale Flächenverzerrung von F an, was durch den Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

deutlich gemacht wird. Ferner gilt $\det(g_{ij}) = \left\| \frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\|^2$ (Übung)

Lemma 2.41. Sei S eine reguläre Fläche, seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ lokale Parametrisierungen von S . Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f|_{S-(V \cap \tilde{V})} = 0$. Es ist

$$(f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar genau dann, wenn

$$(f \circ \tilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_U (f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 = \int_{\tilde{U}} (f \circ \tilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2.$$

Beweis. Sei $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ die Parametertransformation. Zur Erinnerung: die Beziehung zwischen (g_{ij}) und (\tilde{g}_{ij}) ist

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= D\varphi^*(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)D\varphi \\ \Rightarrow \det(g_{ij}) &= \det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)(\det(D\varphi))^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} &= \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)} |\det(D\varphi)|. \end{aligned}$$

Sei $(f \circ \tilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}$ integrierbar. Nach der Transformation ist auch

$$(f \circ \tilde{F} \circ \varphi)\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}|\det(D\varphi)| = (f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})}$$

integrierbar und (mit $\tilde{u} = \varphi(u)$)

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{U}} f(\tilde{F}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))}d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \\ &= \int_U f(F(u^1, u^2))\sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))}du^1 du^2. \end{aligned}$$

■

Beispiel. Ist $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ die x - y -Ebene, so wählen wir kartesische Koordinaten $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, 0)$. Dann ist (g_{ij}) die Einheitsmatrix (I_2) und somit $dA = dx dy$. Also

$$\int_S f dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy,$$

wie das ursprüngliche Integral über \mathbb{R}^2 . Mit den Polarkoordinaten r und φ ($\tilde{F}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$) haben wir

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dA = r dr d\varphi.$$

Also

$$\int_S f dA = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\tilde{F}(r, \varphi)) d\varphi r dr.$$

Definition 2.42. Sei S eine reguläre Fläche. Eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls sich f schreiben lässt als endliche Summe

$$(3) \quad f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k,$$

wobei die $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sind, die jeweils außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwinden. In diesem Fall setzen wir ferner

$$\int_S f dA := \sum_{i=1}^k \int_S f_i dA.$$

Eine Möglichkeit, zu einer integrierbaren Funktion f eine Zerlegung der Form (3) zu finden, in der jedes f_i integrierbar ist und außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwindet, geht wie folgt. Wählen eine Überdeckung von S , d.h. endlich viele Koordinatenumgebungen $(U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ so, dass $S \subset \cup_{i=1}^k V_i$. Zu einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ sei $\chi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned} f_1 &:= \chi_{V_1} f \\ f_2 &:= \chi_{V_2 - V_1} f \\ &\vdots \\ f_k &:= \chi_{V_k - \cup_{i=1}^{k-1} V_i} f \end{aligned}$$

Dann gilt $f = f_1 + \dots + f_k$ und jedes f_i verschwindet außerhalb von V_i .

Ü 1. Zeigen Sie, dass alle f_i integrierbar sind im Sinne von Definition 2.39, falls f integrierbar ist im Sinne von Definition 2.41. (Übung)

Ü 2. Zeigen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_S f dA$ in Definition 2.41 unabhängig von der Wahl der Zerlegung $f = f_1 + \dots + f_k$ ist. (Übung)

– Sind $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so ist $\alpha f + \beta g : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_S (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \int_S f dA + \beta \int_S g dA$$

– Sind $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und gilt $f \leq g$, so folgt

$$\int_S f dA \leq \int_S g dA$$

(Übung)

Definition 2.43. Eine Teilmenge $N \subset S$ einer regulären Fläche heißt *Nullmenge*, falls für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Menge

$$F^{-1}(V \cap N)$$

eine Nullmenge in $U \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Ü 3: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien $(U_i, F_i, V_i)_{i=1, \dots, +\infty}$ lokale Parametrisierungen, die S überdecken, d.h. $S \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subset S$ bereits eine Nullmenge ist, falls $F_i^{-1}(N) \subset V_i$ Nullmengen sind.

Bemerkung. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. $N \subset S$ eine Nullmenge, und sind $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ Funktionen, die auf $S - N$ übereinstimmen (d.h. $f_{S-N} = g_{S-N}$), dann gilt: Ist f integrierbar, so auch g und es gilt:

$$\int_S f dA = \int_S g dA.$$

Definition 2.44. Sei S eine reguläre Fläche. Ist die konstant Funktion $f = 1$ integrierbar, so nennen wir

$$A[S] := \int_S dA$$

den *Flächeninhalt* von S .

Beispiel 1. Auf der x - y -Ebene $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ divergiert das Integral

$$\int_S 1 \cdot dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dx dy$$

d.h. die Funktion $f \equiv 1$ ist nicht integrierbar.

Beispiel 2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene parametrisierte reguläre Kurve. Sei $h > 0$. Der verallgemeinerte Zylinder über c ist definiert durch

$$S = \{c(t) + se_3 : t \in I, s \in (0, h)\}.$$

Für den Zylinder haben wir eine globale Parametrisierung

$$U = I \times (0, h) \subset \mathbb{R}^2 \quad V = \mathbb{R}^3 \quad F(t, s) = c(t) + se_3.$$

Berechnen wir

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) = (c'(t), 0) \quad \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = e_3$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} g_{11}(t, s) &= \langle c'(t), c'(t) \rangle = \|c'(t)\|^2 \\ g_{12}(t, s) &= \langle c'(t), e_3 \rangle \\ g_{21}(t, s) &= \langle e_3, c'(t) \rangle \\ g_{22}(t, s) &= \langle e_3, e_3 \rangle = 1 \\ \Rightarrow dA &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \|c'(t)\| dt ds. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$A[S] = \int_I \int_0^h \|c'(t)\| ds dt = hL[c].$$

Beispiel 3. Der Flächeninhalt von der Sphäre $S = \mathbb{S}^2$. Wir benutzen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} U &= (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ V &= \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\} \\ F(\varphi, \Theta) &= (\cos \varphi \cos \Theta, \sin \varphi \cos \Theta, \sin \Theta). \end{aligned}$$

Da $N = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ eine Nullmenge in \mathbb{S}^2 , können wir sie für die Berechnung des Flächeninhalts ignorieren. Es gilt

$$D_{(\varphi, \Theta)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \Theta & -\cos \varphi \sin \Theta \\ \cos \varphi \cos \Theta & -\sin \varphi \sin \Theta \\ 0 & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g_{11} = \cos^2 \Theta \quad g_{21} = g_{12} = 0 \quad g_{22} = 1.$$

Also der Flächeninhalt von der Kugel ist

$$\begin{aligned} A[S] &= A[S - N] \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta d\Theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta d\Theta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2.8. Einige Klassen von Flächen.

1. Regelflächen

Betrachten wir eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall ist) und weitere glatte Abbildung $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Setze

$$(4) \quad \begin{aligned} F : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(t, s) &= c(t) + sv(t). \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Bild von F kann so beschrieben werden: in jedem Punkt $c(t)$ betrachte die Gerade (oder Strecke), die durch $c(t)$ läuft und $v(t)$ als Richtungsvektor besitzt. Das Bild von F ist dann die Vereinigung aller diesen Geraden. Ist dies eine reguläre Fläche? Um das zu überprüfen, berechnen wir das Differential von F .

$$D_{(t,s)}F = (c'(t) + sv'(t), v(t))$$

Falls wir voraussetzen, dass $v(t)$ und $c'(t)$ linear unabhängig sind, dann hat für festes t die Matrix $D_{(t,0)}F$ den maximalen Rang. Somit existiert dann eine offene Umgebung von $(t, 0)$ in $I \times \mathbb{R}$ derart, dass (U, F, S) eine Parametrisierung der regulären Fläche $S = F(U)$ ist.

Definition 2.45 (Regelfläche). Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, die durch eine Parametrisierung der Form (4) darstellbar ist, heißt *Regelfläche*.

Beispiel 1. (Verallgemeinerter Zylinder über eine Kurve)

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene parametrisierte Kurve ohne Selbstdurchschnitte, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ und $v(t) = (0, 0, 1)$, so heisst die zugehörige Regelfläche

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ s \end{pmatrix}$$

verallgemeinerter Zylinder über c .

Beispiel 2. (Der verallgemeinerter Kegel) Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in dem obigen Beispiel. Zu einem festen Punkt $p \in \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ setzen wir $v(t) = p - c(t)$. Der verallgemeinerter Kegel über c ist die Regelfläche definiert durch:

$$\begin{aligned} F : I \times (-\infty, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(t, s) &= (1 - s)c(t) + sp \\ &= c(t) + s(p - c(t)). \end{aligned}$$

Beispiel 3. (Das Möbiusband)

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(t, s) &= \left(\cos t + s \cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t + s \sin t \cos \frac{t}{2}, s \sin \frac{t}{2} \right) \\ &= (\cos t, \sin t, 0) + s \left(\cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Beispiel 4. (Rotationshyperboloid oder einschaliges Hyperboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\} \\ c(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \\ v(t) &= c'(t) + e_3 = (-\sin t, \cos t, 1). \end{aligned}$$

Beispiel 5. (Das hyperbolische Paraboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\} \\ c(t) &= (t, 0, 0) \\ v(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, 1, t). \end{aligned}$$

Satz 2.46. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche. Dann gilt für die Gaußkrümmung

$$K \leq 0.$$

Beweis. Zur Erinnerung:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Betrachten wir eine Parametrisierung der Form (4) in 2.8.1

$$F(t, s) = c(t) + sv(t).$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0.$$

Also gilt:

$$h_{22} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, N \right\rangle = 0,$$

wobei N die Flächennormale ist. Es folgt somit:

$$\det(h_{ij}) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \leq 0$$

Andererseits haben wir $\det(g_{ij}) > 0$, weil (g_{ij}) positiv definit ist. Damit gilt

$$K \leq 0.$$

■

2. Drehflächen

Definition 2.47 (die Drehfläche). Eine Drehfläche ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, t),$$

wobei $(r(t), t)$ eine in der x - z -Ebene liegende Kurve ist.

Die Gauß-Krümmung und bzw. mittlere Krümmung ist

$$K = -\frac{r''(t)}{r(t)(1+r'(t)^2)^2}$$

bzw.

$$H = \frac{1}{2} \frac{r(t)r''(t) - 1 - r'(t)^2}{r(t)(1+r'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel 1. (Der Rotationshyperboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\} \\ F(t, s) &= (\sqrt{1+t^2} \cos s, \sqrt{1+t^2} \sin s, t) \\ r' &= \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ r'' &= \frac{2}{\sqrt[3]{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Also

$$K = -\frac{r''(t)}{r(t)(1+r'(t)^2)^2} < 0 \text{ (hyperbolisch).}$$

Beispiel 2. (Das Rotationsparaboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}. \\ F(t, \varphi) &= (\sqrt{t} \cos \varphi, \sqrt{t} \sin \varphi, t) \\ K &= \frac{4}{(1+4t)^2} \\ H &= \frac{2+4t}{\sqrt[3]{1+4t}}. \end{aligned}$$

Beispiel 3. (Der Drehtorus)

$$\begin{aligned} S &= F(\mathbb{R}^2) \\ F(\theta, s) &= ((2 + \cos s) \cos \theta, (2 + \cos s) \sin \theta, \sin s). \end{aligned}$$

Durch die Transformation $t = \sin s$, ist der Drehtorus eine Drehfläche.

$$F(\theta, t) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, t) \quad \theta \in (0, \pi)$$

wobei

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 + \sqrt{1-t^2} \\ \Rightarrow r'(t) &= \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \quad \& \quad r''(t) = \frac{-1}{\sqrt[3]{1-t^2}} \\ \Rightarrow K(t, \theta) &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{2 + \sqrt{1-t^2}} = \frac{\cos s}{2 + \cos s}. \end{aligned}$$

3. Röhrenfläche

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit nicht verschwindender Krümmung, $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann sind die Windung τ und das Frenet-Dreibein (c', n, b) definiert. Sei $r > 0$. Eine *Röhrenfläche* mit Dicke $2r$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(t, \varphi) = c(t) + r \cdot (\cos \varphi \cdot n(t) + \sin \varphi \cdot b(t)).$$

Die Gauß-Krümmung und bzw. mittlere Krümmung ist

$$K = -\frac{1}{r} \frac{\kappa(t) \cos \varphi}{1 - r \cos \varphi \kappa(t)}$$

bzw.

$$H = \frac{1}{2r} \frac{1 - 2r \cos \varphi \kappa(t)}{1 - r \cos \varphi \kappa(t)}.$$

(Übung)

Beispiel (*Der Drehtorus*) Die Röhrenfläche um die Kreilinie

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0)^\perp$$

mit Dicke $2r < 2$ ist einer Drehtorus.

$$\begin{aligned} c(t) + r \cdot (\cos \varphi \cdot n(t) + \sin \varphi \cdot b(t)) &= \\ ((1 + r \cos \varphi) \cos t, (1 + r \cos \varphi) \sin t, r \sin \varphi)^\perp. \end{aligned}$$

2.9. Minimalflächen.

Satz 2.48 (Variation des Flächeninhaltes). *Sei S eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt. Sei \mathcal{H} das mittlere Krümmungsfeld. Sei $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld auf S mit kompakten Träger. Dann ist für $|t|$ hinreichend klein die Menge $S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$ eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt und es gilt:*

$$\frac{d}{dt}A[S_t]|_{t=0} = -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist. D.h. für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) gilt $\text{supp}(\Phi) \subset (S \cap V)$. Für S_t ist die entsprechende Parametrisierung gegeben durch (U, F_t, V) , wobei

$$\begin{aligned} F_t : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F_t(u^1, u^2) &= F(u^1, u^2) + t\Phi(F(u^1, u^2)), \end{aligned}$$

für $|t|$ klein eine lokale Parametrisierung ist, denn die Injektivität von F_t ist eine offene Bedingung. Jetzt berechnen wir

$$\frac{\partial F_t}{\partial u^j} = \frac{\partial F}{\partial u^j} + \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^j} (N \circ F) + (f \circ F) \frac{\partial(N \circ F)}{\partial u^j},$$

wobei $\Phi = fN$ und N das durch die Parametrisierung gegebene Einheitsnormalenfeld auf $S \cap V$ ist. Wir haben die erste Fundamentalform von S_t

$$\begin{aligned} g_{kj}^t &= \left\langle \frac{\partial F_t}{\partial u^k}, \frac{\partial F_t}{\partial u^j} \right\rangle \\ &= g_{kj} + t \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^j} \underbrace{\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, N \circ F \right\rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial(N \circ F)}{\partial u^j} \right\rangle}_{=-h_{kj}} \\ &\quad + t \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^k} \underbrace{\left\langle N \circ F, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\left\langle \frac{\partial(N \circ F)}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle}_{=-h_{jk}} + O(t^2) \\ &= g_{kj} - 2t(f \circ F)h_{kj} + O(t^2) \\ &= \sum_{z=1}^2 (\delta_k^z - 2t(f \circ F) \sum_l \underbrace{h_{kl} g^{zl}}_{=w_k^z} + O(t^2)) g_{zj} \\ &= \sum_{z=1}^2 (\delta_k^z - 2t(f \circ F)w_k^z + O(t^2)) g_{zj}, \end{aligned}$$

Benutzen wir die folgende Taylor-Entwicklung der Determinante:

$$\det(Id + X) = 1 + \text{Spur}(X) + O(\|X\|^2) \quad (*)$$

und erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\det(g_{kj}^t) &= \det(g_{kj}) \det(Id - 2t(f \circ F)(w_k^z) + O(t^2)) \\
&= \det(g_{kj})(1 + \text{Spur}(-2t(f \circ F)(w_k^z) + O(t^2))) \\
&= \det(g_{kj})(1 - 4t(f \circ F)H + O(t^2)).
\end{aligned}$$

Nach $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det(g_{kj}^t)} &= \sqrt{\det(g_{kj})} \sqrt{1 - 4t(f \circ F)H + O(t^2)} \\
&= \sqrt{\det(g_{kj})}(1 - 2tfH + O(t^2)).
\end{aligned}$$

Integration über S liefert nun

$$\begin{aligned}
A[S_t] &= \int_S 1 - 2tfH + O(t^2) dA \\
&= A[S] - 2t \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA + O(t^2).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist.

Für den allgemeineren Fall, haben wir endlich viele Koordinatensysteme $(U_1, F_1, V_1) \dots (U_k, F_k, V_k)$, die den Träger von Φ überdecken. D.h. $\text{Supp}(\Phi) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Wir wählen eine untergeordnete *Teilung der Eins*, d.h. glatte Funktion $\varrho_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varrho_j \leq 1$, $\text{Supp}(\varrho_j) \subset V_j$ und $\sum_{j=1}^k \varrho_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\text{Supp}(\Phi)$. Nun setzen wir $\Phi_j := \varrho_j \Phi$. Dann gilt $\sum_{j=1}^k \Phi_j = \Phi$ und $\text{Supp}(\Phi_j) \subset V_j$. Betrachten wir

$$S_{(t_1, \dots, t_k)} = \{p + \sum_{j=1}^k t_j \Phi_j(p) : p \in S\}.$$

Nach dem oben bereits Bewiesenen wissen wir

$$\frac{\partial}{\partial t_j} A[S_{(t_1, \dots, t_k)}] |_{(t_1, \dots, t_k) = (0, \dots, 0)} = -2 \int_S \langle \Phi_j, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Nach der Kettenregel folgt daraus

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} A[S_t]_{t=0} &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial t_j} A[S_{(t_1, \dots, t_k)}] |_{(t_1, \dots, t_k) = (0, \dots, 0)} \\
&= -2 \sum_{j=1}^k \int_S \langle \Phi_j, \mathcal{H} \rangle dA \\
&= -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.
\end{aligned}$$

■

Korollar 2.49. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss \bar{S} . Wir nehmen an, dass S minimalen Flächeninhalt hat unter allen regulären Flächen \bar{S} mit demselben Rand $\partial\bar{S} = \partial S$. Dann gilt für das mittlere Krümmungsfeld von S

$$\mathcal{H} \equiv (0, 0, 0).$$

Beweis. Angenommen $\mathcal{H}(p) \neq (0, 0, 0)$ für einen Punkt $p \in S$. In einer Umgebung von p betrachten wir das glatte Einheitsnormalenfeld N , für das $\langle \mathcal{H}(p), N(p) \rangle > 0$ ist. Es ist klar, dass gilt $\langle \mathcal{H}, N \rangle > 0$ auf einer kleinen Umgebung V von p in S . Wähle eine glatte Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\text{Supp}(f) \subset V$, $f \geq 0$ und $f(p) > 0$ und setze

$$\Phi(g) := \begin{cases} f(g)N(g) & \text{falls } g \in S \cap V \\ (0, 0, 0) & \text{falls } g \in S - V. \end{cases}$$

Φ ist ein glattes Normalenfeld auf S mit kompaktem Träger und

$$\int_S \langle \mathcal{H}, \Phi \rangle > 0.$$

Andererseits nach Satz 2.48 gilt

$$\frac{d}{dt} A[S_t]_{t=0} = 0.$$

Und das ist ein Widerspruch ■

Definition 2.50 (Minimalfläche). Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Minimalfläche*, falls die mittlere Krümmung

$$H = 0.$$

Bemerkung. Minimalflächen müssen nicht unbedingt Flächenminimierend sein!

Bemerkung. Ist die Fläche S orientierbar, so gibt es ein glattes Einheitsnormalenfeld N auf S und $\mathcal{H} = HN$, wobei H die mittlere Krümmung ist. Die Minimalflächenbedingung lautet dann $H \equiv 0$.

Proposition 2.51. Sei S der Graph der Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ -offen. S ist genau dann eine Minimalfläche, wenn φ folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Beweis. Übung! ■

Lemma 2.52 (Ableitung der Determinante). Sei $t \rightarrow g(t)$ eine differenzierbare Kurve von invertierbaren reellen $n \times n$ -Matrizen. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \ln \det(g) = \text{Spur}(g^{-1} \frac{d}{dt} g)$$

Beweis. Zunächst weisen wir die Gleichung in $t = t_0$ nach, falls $g(t_0) = Id$. Dann lautet die Behauptung einfach

$$\frac{d}{dt} \det(g(t_0)) = \text{Spur}\left(\frac{dg}{dt}(t_0)\right)$$

Wegen

$$\det(g) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) (g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)})$$

wobei die Summe über alle Permutationen $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ zu bilden ist, haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(g(t_0)) &= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \left(\frac{dg_{1\sigma(1)}}{dt}(t_0) \cdots g_{n\sigma(n)}(t_0) + \cdots + g_{1\sigma(1)}(t_0) \cdots \frac{dg_{n\sigma(n)}}{dt}(t_0) \right) \\ &= \frac{dg_{11}}{dt}(t_0) \cdots g_{nn}(t_0) + \cdots + g_{11}(t_0) \cdots \frac{dg_{nn}}{dt}(t_0) \\ &= \text{Spur}\left(\frac{d}{dt}g(t_0)\right) \end{aligned}$$

Für den allgemeineren Fall, setzen wir $h(t) := (g(t_0))^{-1}g(t)$. Für $h(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \det((g(t_0))^{-1}) \frac{d}{dt} \det(g(t_0)) &= \frac{d}{dt} \det(h(t_0)) \\ &= \text{Spur}\left(\frac{dh}{dt}(t_0)\right) \\ &= \text{Spur}((g(t_0))^{-1} \frac{d}{dt}g(t_0)) \end{aligned}$$

■

Beispiel 1 Das einfachste und uninteressante Beispiel ist sicherlich eine affine Ebene $S \subset \mathbb{R}^3$. Für diese gilt

$$K \equiv H \equiv 0$$

Beispiel 2 Die *Enneper-Fläche* kann durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = \left(u^1 - \frac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2, u^2 - \frac{(u^2)^3}{3} + u^2(u^1)^2, (u^1)^2 - (u^2)^2 \right).$$

Beispiel 3 Die *Kettenfläche* (oder das *Katenoid*):

$$F(u^1, u^2) = (\cosh u^1 \cos u^2, \cosh u^1 \sin u^2, u^1).$$

Beispiel 4 Die *Wendelfläche* (oder das *Helikoid*):

$$F(u^1, u^2) = (u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, u^2).$$

Satz 2.53. Für jede reguläre Fläche gilt

$$K \leq H^2.$$

Beweis.

$$4(H^2 - K) = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 = (k_1 - k_2)^2 \geq 0$$

■

Korollar 2.54. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche. Dann gilt*

$$K \leq 0$$

Somit gibt es keine kompakte Minimalflächen.

Beweis.

■

Definition 2.55 (Konforme Parametrisierung). Sei S eine reguläre Fläche, und sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Wir nennen $F(U)$ parametrisierte Fläche, oder Flächenstück. In der Reste des Abschnitts betrachten wir den Flächenstücke. F heißt *konform* oder *winkeltreu*, wenn die erste Fundamentalform (g_{ij}) bzgl. der lokalen Parametrisierung ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, also wenn die Gleichung

$$(g_{ij})(u) = \lambda(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt mit einer gewissen Funktion $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Eine konforme Parametrisierung heißt auch *isotherm*, die zugehörigen Parameter heißen *isotherme Parameter*. λ heißt *konform Faktor* von konformer Parametrisierung (U, F, V) .

Proposition 2.56. Für eine konforme Parametrisierung (U, F, V) mit dem konformen Faktor λ gilt

$$\Delta F = 2\lambda\mathcal{H} = 2\lambda H \cdot N.$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^2}$$

der Laplace-Operator ist. Insbesondere definiert eine konforme Parametrisierung F genau dann eine Minimalfläche, wenn die drei Komponentenfunktionen f_1, f_2, f_3 von F harmonisch sind,

Beweis. Leiten wir die Gleichungen

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \right\rangle = \lambda, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle = \lambda, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle = 0,$$

ab und erhalten wir

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\rangle.$$

Es folgt

$$\langle \Delta F, \frac{\partial F}{\partial u^1} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \right\rangle = 0.$$

Analog, erhalten wir

$$\langle \Delta F, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = 0.$$

D.h., ΔF steht senkrecht auf der Tangentialebene, ist also propotional zur Einheitsnormalen N . Nun ist aber $2H = \lambda^{-2}(g_{22}h_{11} + g_{11}h_{22}) = \lambda^{-1}(h_{11} + h_{22})$, folglich

$$\langle \Delta F, N \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial F}{\partial u^2}, N \right\rangle = h_{11} + h_{22} = 2H\lambda.$$

■

Wir verwenden die folgende grundlegende Tatsache aus der Funktionentheorie: Eine komplexe Funktion

$$\phi(u_1 + iu_2) = x(u_1, u_2) + iy(u_1, u_2)$$

mit reellen Größen u_1, u_2, x, y ist komplex analytisch oder holomorph genau dann, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial y}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = -\frac{\partial y}{\partial u_1}.$$

Für eine Parametrisierung (U, F, V) mit Komponenten $F = (f_1, f_2, f_3)$ definieren wir eine Abbildung $\phi : U \rightarrow C^3$ durch

$$\phi(u_1 + iu_2) = \frac{\partial F}{\partial u_1} - i \frac{\partial F}{\partial u_2},$$

bzw.

$$\phi_j(u_1 + iu_2) = \frac{\partial f_j}{\partial u_1} - i \frac{\partial f_j}{\partial u_2}, \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

Proposition 2.57. *Es gilt:*

(a) *F ist konform genau dann, wenn*

$$(5) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$$

(b) *Falls F eine konforme Parametrisierung ist, so ist F(U) eine Minimalfläche genau dann, wenn ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorph sind.*

(c) *Falls umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorph sind mit*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

dann ist das durch die obigen Gleichungen definierte F regulär genau dann, wenn

$$(6) \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0.$$

Beweis. (a) Nach Definition gilt

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_1} \right\rangle + i^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_2}, \frac{\partial F}{\partial u_2} \right\rangle - 2i \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2} \right\rangle = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0.$$

(b) Berechne die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} (\operatorname{Re} \phi_k) = \frac{\partial}{\partial v} (\operatorname{Im} \phi_k) \\ \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2} &= -\frac{\partial}{\partial v} (\operatorname{Im} \phi_k) \\ \frac{\partial^2 f_k}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} (\operatorname{Re} \phi_k) = -\frac{\partial}{\partial u} (\operatorname{Im} \phi_k) \end{aligned}$$

denn ϕ_k holomorph sind. Daraus folgt es

$$\Delta f_k = \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2} = 0,$$

also $\Delta F = 0$. Es folgt aus Proposition 2.56

$$H = 0.$$

(c) Es ist leicht zu sehen, dass

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k \bar{\phi}_k = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial f_k}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial v} \right)^2 = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0$. ■

Bemerkung. Der Beweis von (b) impliziert, dass F harmonisch ist genau dann, wenn ϕ_k ($k = 1, 2, 3$) holomorph sind.

Korollar 2.58. *In einem einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ seien drei holomorphe Funktionen $\phi_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, 3$) gegeben mit Bedingungen (5) und (6). Dann ist für festes $u_0 \in U$ die durch*

$$f_k(z) = \operatorname{Re} \int_{u_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2, 3$$

definierte Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläre Minimalfläche (oder reguläres Minimalflächenstück).

Lemma 2.59 (isotherme Parameter). *Wenn man von Krümmungslinienparametern (u^1, u^2) einer Minimalfläche mit $K \neq 0$ ausgeht ($g_{12} = h_{12} = 0$), dann kann man daraus durch einfache Integration eine konforme Parametrisierung konstruieren, also isotherme Parameter.*

Beweis: In Krümmungslinienparametern gilt

$$\frac{\partial N}{\partial u^j} = -\kappa_j \frac{\partial F}{\partial u^j}.$$

Das Ableiten von obigen Gleichung liefert

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u^1 \partial u^2} = -\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\kappa_2 \frac{\partial F}{\partial u^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\kappa_1 \frac{\partial F}{\partial u^1} \right).$$

Setze $\kappa = \kappa_1 = -\kappa_2 > 0$ (da F Minimalfläche ist). Es folgt

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u^2} \frac{\partial F}{\partial u^1} + 2\kappa \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \kappa}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^2} = 0.$$

Das Skalarprodukt von der Gleichung mit $\frac{\partial F}{\partial u^1}$ liefert

$$0 = \frac{\partial \kappa}{\partial u^2} g_{11} + 2\kappa \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \right\rangle + \frac{\partial \kappa}{\partial u^1} \cdot 0 = \frac{\partial}{\partial u^2} (\kappa \cdot g_{11}).$$

Also ist $\kappa \cdot g_{11}$ konstant in u^2 -Richtung, ist also eine Funktion nur von u^1 . Setze $\kappa \cdot g_{11} = \Phi_1(u^1) > 0$. Analog ist $\kappa \cdot g_{22}$ eine Funktion nur von u^2 . Wir

setzen $k \cdot g_{22} = \Phi_1(u^2) > 0$. Betrachte nun

$$v^i := \int \sqrt{\Phi_i(u^i)} du^i, \quad i = 1, 2$$

und die Transformation $(u^1, u^2) \mapsto (v^1, v^2)$, denn

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}$$

hat den Maximalen Rang. Sei Ψ die Inverse der Transformation und setze $\tilde{F} = F \circ \Psi$. Der erste Fundamentalf orm bzgl. \tilde{F} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{ij}) &= (D\Psi)^*(g_{ij})D\Psi \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Korollar 2.60 (Analytizität der Minimalflächen). *Sei (U, F, V) ein Minimalflächenstück ohne Flachpunkte. Dann gibt es eine Parametrisierung derart, dass die drei Komponentenfunktionen reell-analytisch, sind, also lokal in ihre Taylorreihe entwickelbar.*

Lemma 2.61. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Drei beliebig gegebenen holomorphen Funktionen $\phi_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, 3$) mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ (keines der ϕ_k identisch verschwindet) kann man eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine meromorphe Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zuordnen derart, dass fh^2 holomorph ist und*

$$(7) \quad \phi_1 = \frac{f}{2}(1 - h^2), \quad \phi_2 = i\frac{f}{2}(1 + h^2), \quad \phi_3 = fh.$$

Umgekehrt induziert jedes gegebene f und h mit den angegebenen Eigenschaften ein entsprechendes ϕ mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.

Beweis: Setzen wir

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad h = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Dies ist wohldefiniert außer in dem Fall $\phi_1 = i\phi_2$, woraus notwendig $\phi_3 = 0$ folgt. Wir haben

$$fh^2 = \frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -(\phi_1 + i\phi_2),$$

also eine holomorphe Funktion. Die Gleichungen (7) verifiziert man leicht anhand der Definition.

Umgekehrt seien f und h gegeben, dann erfüllen die durch Gleichungen (7) definierten ϕ_k ($k = 1, 2, 3$) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0.$$

Ferner sind ϕ_1, ϕ_2 holomorph, weil f und fh^2 holomorph sind. Folglich ist ϕ_3^2 holomorph. Da $\phi_3 = fh$ meromorph ist, ist ϕ_3 holomorph. \square

Satz 2.62 (Weierstraß-Darstellung). *Jede konform parametrisierte Minimalfläche (U, F, V) , die keine Ebene ist, lässt sich lokal darstellen durch*

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^u \frac{f}{2}(1 - h^2)d\zeta \\ f_2(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^u i \frac{f}{2}(1 + h^2)d\zeta \\ f_3(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^u fhd\zeta \end{aligned}$$

wobei f und h wie oben in Lemma 2.61 gewählt sind. Der Parameterbereich muss dabei so gewählt werden, dass die auftretenden Integrale wegunabhängig sind (z.B. als eine kleine Kreisscheibe oder ein einfach zusammenhängendes Gebiet).

Umgekehrt definiert jedes vorgegebene Paar $(f(z), h(z))$ mit holomorphem f , meromorphem h und holomorphem fh^2 ein konform parametrisiertes Minimalflächenstück $F(U)$. Dieses Flächenstück F ist jedenfalls dann regulär, wenn f höchstens an den Polen von h verschwindet und dort $fh^2 \neq 0$ gilt.

Beispiel 1. Die Weierstraß-Darstellung der Enneper-Fläche

$$F(u^1, u^2) = \left(u^1 - \frac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2, -u^2 + \frac{(u^2)^3}{3} - u^2(u^1)^2, (u^1)^2 - (u^2)^2 \right).$$

ist durch $f = 2, h(z) = z$ gegeben mit $\phi_1 = 1 - z^2, \phi_2 = i(1 + z^2), \phi_3 = 2z$.

Für die Wahl von $f = 2z^2, h = z^{-1}$ ergibt sich $\phi_1 = z^2 - 1, \phi_2 = i(z^2 + 1), \phi_3 = 2z$ und damit wieder (bis auf die Spiegelung $f_1 \mapsto -f_1$) die Enneper-Fläche. Die Weierstraß-Darstellung ist also im geometrischen Sinne keineswegs eindeutig.

Beispiel 2. Das Katenoid $F(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_1)$ ist die von der Kettenlinie erzeugte Drehfläche. Hier gilt

$$\begin{aligned} \phi_1(u_1 + iu_2) &= \sinh u_1 \cos u_2 + i \cosh u_1 \sin u_2 = \sinh(u_1 + iu_2) \\ \phi_2(u_1 + iu_2) &= \sinh u_1 \sin u_2 - i \cosh u_1 \cos u_2 = -i \cosh(u_1 + iu_2) \\ \phi_3(u_1 + iu_2) &= 1 \end{aligned}$$

Offenbar sind ϕ_k ($k = 1, 2, 3$) holomorph mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \sinh^2 z + i^2 \cosh^2 z + 1 = 0$. Nach 3.31 ist dann F eine konform parametrisierte Minimalfläche. Die Weierstraß-Darstellung ist

$$f(z) = -e^{-z}, h(z) = -e^z.$$

Beispiel 3. Die Wendelfläche (oder das Helikoid) ist zugleich Regelfläche und Minimalfläche:

$$F(u_1, u_2) = (0, 0, -u_1) + u_2(-\sin u_1, \cos u_1, 0) = (-u_2 \sin u_1, u_2 \cos u_1, -u_1)$$

Wenn wir die Fläche umparametrisieren als

$$\tilde{F}(u_1, u_2) = (-\sinh u_1 \sin u_2, \sinh u_1 \cos u_2, -u_2),$$

dann wird die zugehörige ϕ_k

$$\phi_1(z) = i \sinh z, \quad \phi_2(z) = \cosh z, \quad \phi_3(z) = i.$$

Dies sind nun -bis auf den Faktor i - genau dieselben Funktionen ϕ_k ($k = 1, 2, 3$) wie oben für das Katenoid. Wir sehen daran auch, dass das Katenoid F und das Helikoid \tilde{F} lokal isometrisch. (Die Definition wird später gegeben.)

3. INNERE GEOMETRIE VON FLÄCHEN

3.1. Isometrien.

Definition 3.1 (lokale Isometrien). Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Eine glatte Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt *lokale Isometrie*, falls für jeden Punkt $p \in S_1$ das Differential

$$d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

eine lineare Isometrie bzgl. der ersten Fundamentalform, d.h.,

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

für alle $X, Y \in T_p S_1$.

Beispiel 3.2. Sei $S_1 = \{\mathbb{R}^2\} \times \{0\}$ die x - y -Ebene, $S_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2, \quad f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)$$

ist eine lokale Isometrie.

Beispiel 3.3. Sei $S_1 = \{\mathbb{R}^2\} \times \{0\}$ die x - y -Ebene, $S_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{3}\zeta^2, \zeta > 0\}$ die Kegelfläche. Die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2, \quad f(x, y, 0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 - y^2, 2xy, \sqrt{3}(x^2 + y^2) \right)$$

ist eine lokale Isometrie.

Beweis. Für $e_1, e_2 \in T_p S_1$ und $p = (x_0, y_0, 0)$

$$\langle d_p f(e_i), d_p f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

wobei $e_1 = \frac{d}{dt}|_{t=0} (p + t(1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} d_p f(e_1) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{1}{2\sqrt{(x_0+t)^2 + y_0^2}} \left((x_0+t)^2 - y_0^2, 2(x_0+t)y_0, \sqrt{3}((x_0+t)^2 + y_0^2) \right) \right) \\ &= -\frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^2 - y_0^2, 2y_0x_0, \sqrt{3}(x_0^2 + y_0^2) \right) + \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left(2x_0, 2y_0, 2\sqrt{3}x_0 \right) \\ &= \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^3 + 3x_0y_0^2, 2y_0^3, \sqrt{3}x_0(x_0^2 + y_0^2) \right) \\ d_p f(e_2) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0^2 + (y_0+t)^2}} \left(x_0^2 - (y_0+t)^2, 2x_0(y_0+t), \sqrt{3}(x_0^2 + (y_0+t)^2) \right) \right) \\ &= -\frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^2 - y_0^2, 2x_0y_0, \sqrt{3}(x_0^2 + y_0^2) \right) + \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left(-2y_0, 2x_0, 2\sqrt{3}y_0 \right) \\ &= \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-3x_0^2y_0 - y_0^3, 2x_0^3, \sqrt{3}y_0(x_0^2 + y_0^2) \right) \end{aligned}$$

Also $\langle d_p f(e_1), d_p f(e_1) \rangle = \langle d_p f(e_2), d_p f(e_2) \rangle = 1$ und $\langle d_p f(e_1), d_p f(e_2) \rangle = 0$.

Bemerkung. Die Länge von Kurven, die auf der Fläche verlaufen, und der Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren hängen nur von der ersten Fundamentalform ab. Falls es also eine lokale Isometrie f gibt, verändert sich die Länge und der Winkel *nicht* durch die Abbildung f .

Definition 3.4 (Größen der inneren Geometrie). Die geometrische Größen, die sich unter lokalen Isometrien nicht verändern, heißen *Größen der inneren Geometrie*.

Frage: Ist die Gauß-Krümmung oder die mittlere Krümmung eine Größe der inneren Geometrie, d.h. für jede lokale Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$ gilt

$$K_{S_1} = K_{S_2} \circ f \quad \text{oder} \quad H_{S_1} = H_{S_2} \circ f?$$

Beispiel 3.5. Die mittlere Krümmung ist keine Größe der inneren Geometrie, denn für die Ebene inst $H_E \equiv 0$, während für die Zylinderfläche $H_Z \equiv \frac{1}{2}$ gilt. Da Ebene und Zylinder lokal isometrisch sind, müsste $H_Z = H_E \circ f$ gelten, falls die mittlere Krümmung eine Größe der inneren Geometrie wäre. Die Hauptkrümmungen sind auch keine Größen der inneren Geometrie. Aber die Gauß-Krümmung ist dagegen eine Größe der inneren Geometrie (das Theorema Egregium von Gauß).

Bemerkung. Da das Differential einer lokalen Isometrie insbesondere stets maximalen Rang hat, ist nach dem Umkehrsatz eine solche lokale Isometrie stets ein lokaler Diffeomorphismus. Im allgemeinen ist sie jedoch kein globaler Diffeomorphismus, d.h. nicht bijektiv.

Proposition 3.6. Sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine lokale Isometrie. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S_1 . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $V \cap S_1 \subset S_1$ so klein, dass $f_{V \cap S_1} : V \cap S_1 \rightarrow f(V \cap S_1)$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist $f \circ F$ eine lokale Parametrisierung von S_2 . Dann übereinstimmen die Koeffizientenfunktionen der Matrixdarstellungen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ von S_1 bzgl. F und $\tilde{g}_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ bezg. $f \circ F$.

Beweis: Setze $\tilde{F} := f \circ F$. Die Koeffizientenfunktionen der Matrixdarstellung $g_{ij} : v \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle.$$

Und \tilde{g}_{ij} ist

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^j}(u) \right\rangle = \left\langle df \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right), df \left(\frac{\partial F}{\partial u^j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij}(u), \end{aligned}$$

denn f ist eine lokale Isometrie. □

Definition 3.7 (Isometrien). Eine lokale Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$, die zusätzlich bijektiv ist, heißt *Isometrie*. Existiert es eine solche Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$, so heißen die Flächen S_1 und S_2 *isometrisch*. Die Flächen S_1 und S_2 heißen *lokal isometrisch*, falls es zu jedem Punkt $p \in S_1$ eine offene Umgebung $U_1 \subset S_1$ von p gibt, eine offene Teilmenge $U_2 \subset S_2$ und eine Isometrie $f : U_1 \rightarrow U_2$ und umgekehrt, zu jedem Punkt $q \in S_2$ eine offene Umgebung $U'_2 \subset S_2$ von q , eine offene Teilmenge $U'_1 \subset S_1$ und eine Isometrie $f' : U'_2 \rightarrow U'_1$.

Bemerkungen.

- Ist $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie, so ist auch $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ eine Isometrie. (Ü)
- Der Zylinder und die Ebene sind lokal isometrisch. Aber sie sind nicht isometrisch, da sie nicht einmal diffeomorph sind.
- Die Beziehungen “isometrisch” und “lokal isometrisch” bilden offensichtlich Äquivalenzrelationen auf der Menge der regulären Flächen.

3.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung.

Definition 3.8 (das Vektorfeld). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein Vektorfeld auf S ist eine Abbildung $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $v(p) \in T_p S$ für alle $p \in S$.

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt auf der Fläche einen Vektor zu, der in diesem Punkt tangential an die Fläche ist.

Beispiel 3.9 (Gradientenfeld). Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Da die erste Fundamentalform nicht ausgeartet ist, existiert, bei festgehaltenem Punkt p , genau ein Vektor $v(p) \in T_p S$ mit der Eigenschaft

$$d_p f(X) = I(v(p), X)$$

für alle $X \in T_p S$. Dadurch wird das Gradientenvektorfeld $v := \text{grad } f$ definiert.

Definition 3.10. Ein Vektorfeld v auf S ist stetig, bzw. glatt, falls $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig bzw. glatt ist.

Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung der regulären Fläche S . Für jeden Punkt $p \in V \cap S$ bilden die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u^1}(F^{-1}(p))$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2}(F^{-1}(p))$ eine Basis von $T_p S$. Ein Vektorfeld v auf S ist für alle $p \in V \cap S$ in der Form

$$v(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

darstellbar. Da $\frac{\partial F}{\partial u^j}$ glatt sind, ist v auf $V \cap S$ stetig bzw. glatt genau dann, wenn die Koeffizientenfunktionen

$$\xi^i : V \cap S \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig bzw. glatt sind. Diese ist äquivalent zu der Aussage, dass $\xi^i \circ F$ stetig bzw. glatt ist.

Beispiel 3.11. Das Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$ einer glatten Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Sei dazu (U, F, V) eine lokale Parametrisierung. Dann ist $\tilde{f} := f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls eine glatte Funktion. Wir müssen die Funktionen ξ^j in der lokalen Darstellung

$$\text{grad } f = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

bestimmen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) &= d_p f \left(\frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} I \left(\text{grad } f(p), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&= I \left(\sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) g_{jk}(F^{-1}(p)).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\xi^j \circ F = \sum_{k=1}^2 g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}.$$

Damit sind die Funktionen ξ^j glatt, d.h. $\text{grad } f$ ist ein glattes Vektorfeld.

Insbesondere, ist das Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$

$$\text{grad } f(p) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 g^{jk}(F^{-1}(p)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

in der lokalen Darstellung bzgl. (U, F, V) .

Definition 3.12 (Richtungsableitung). Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, $X_p \in T_p S$ ein Tangentialvektor und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann heißt

$$\partial_{X_p} f := d_p f(X_p) = I(\text{grad } f, X_p) \in \mathbb{R}$$

Richtungsableitung von f nach X_p . Ist X ein Vektorfeld auf S , so heißt auch die Funktion

$$\partial_X f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_X f(p) := \partial_{X(p)} f$$

Richtungsableitung von f nach dem Vektorfeld X .

Seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ lokale Parametrisierungen der regulären Fläche. Ein Vektorfeld X auf S für $p \in V \cap \tilde{V} \cap S$ hat mit $V \cap \tilde{V} \cap S \neq \emptyset$ zwei Formen

$$(8) \quad X(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\xi}^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{F}^{-1}(p)).$$

Setze $\tilde{u} := \phi(u) = \tilde{F}^{-1} \circ F$. Nach der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) \frac{\partial \phi^j}{\partial u^i}(u) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j} (F^{-1}(p)) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} (\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (u) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (u) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} (\tilde{u}). \end{aligned}$$

Es folgt

$$(9) \quad \tilde{\xi}^j(p) = \sum_{i=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (F^{-1}(p)).$$

Bemerkung 3.13. Weiter folgt es: 1. Seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ lokale Parametrisierungen der regulären Fläche S mit $V \cap \tilde{V} \cap S \neq \emptyset$. Auf $S \cap V$ (bzw. $S \cap \tilde{V}$) gibt es ein Vektorfeld

$$X(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j} (F^{-1}(p)), \quad \text{bzw.} \quad \tilde{X} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\xi}^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} (\tilde{F}^{-1}(p)).$$

Falls (9) gilt, dann existiert genau ein Vektorfeld Y auf $S \cap (V \cup \tilde{V})$ mit $Y = X$ auf $S \cap U$ und $Y = \tilde{X}$ auf $S \cap \tilde{U}$.

2. Sei S eine reguläre Fläche mit einer Überdeckung $\cup V_{i \in I} = S$ von lokaler Parametrisierungen $(U_\alpha, F_\alpha, V_\alpha)$ ($\alpha \in I$). Auf $S \cap V_\alpha$ gibt es ein Vektorfeld

$$X_\alpha(p) = \sum_{j=1}^2 \xi_\alpha^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j} (F^{-1}(p)).$$

Für alle $S \cap V_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ gilt

$$(10) \quad \xi_\beta^j(p) = \sum_{i=1}^2 \xi_\alpha^i(p) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (F^{-1}(p))$$

mit $\tilde{u} = \phi_{\alpha,\beta}(u) = F_\beta^{-1} \circ F_\alpha(u)$ und $u = F^{-1}(p)$. Dann existiert genau ein Vektorfeld Y auf S mit $Y = X_\alpha$ auf $S \cap U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Seien X und Y Vektorfeldern auf S . Man kann zeigen, dass es genau ein Vektorfeld Z auf S gibt, das für alle glatten Funktionen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f) = \partial_Z f$$

erfüllt.

Falls X und Y bzgl. einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) durch

$$X = \sum_{i=1}^2 \xi_i \frac{\partial F}{\partial u^i} \quad Y = \sum_{i=1}^2 \eta_i \frac{\partial F}{\partial u^i}$$

gegeben sind, Z dann

$$Z = \sum_{i,j=1}^2 (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u^i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i}) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

erfüllt. Mit Bemerkung 3.13 kann man zeigen, dass Z auf ganz S definiert.

Definition 3.14 (Lie-Klammer). Das Vektorfeld

$$Z := [X, Y] := XY - YX$$

heißt *Lie-Klammer* von X und Y .

Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist also durch die Bedingung

$$\partial X (\partial Y f) - \partial Y (\partial X f) = \partial_{[X, Y]} f$$

für alle f charakterisiert.

Bemerkung. Wenn X und Y Koordinatenfelder sind, d.h. $X = \frac{\partial F}{\partial u^i}$ und $Y = \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$, verschwindet die Lie-Klammer

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right] = 0.$$

(Der Satz von Schwarz).

Definition 3.15 (das Vektorfeld längs Kurven). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Ein *Vektorfeld an S längs c* ist eine glatte Abbildung $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $v(t) \in T_{c(t)}S$ ist für alle $t \in I$.

Beispiel 3.16. Das Geschwindigkeitsfeld $v(t) = c'(t)$ ist ein solches Vektorfeld längs c .

Beispiel 3.17. Sei S eine Regelfläche gegeben durch die Parametrisierung $F(t, s) = c(t) + sv(t)$ wie oben. Dann ist v ein Vektorfeld an S längs der Kurve c .

Definition 3.18 (die kovariante Ableitung). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve, und sei $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c . Für jeden Punkt $p \in S$ sei $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ die Orthogonalprojektion, d.h., ist $N(p)$ einer der beiden Einheitsnormalenvektoren an S im Punkt p , so ist

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p)$$

Dann heißt

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := \Pi_{c(t)}(v'(t)),$$

$t \in I$, die *kovariante Ableitung* von v .

Bemerkung. $\frac{\nabla}{dt}v(t)$ ist auch ein Vektorfeld an S längs c .

Beispiel 3.19. Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x - y -Ebene und c eine parametrisierte ebene Kurve, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$. Ein Vektorfeld v an S längs c ist dann von der Form $v(t) = (v_1(t), v_2(t), 0)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}v(t) &= \pi_{c(t)}(v'(t)) \\ &= \pi_{c(t)}(v'_1(t), v'_2(t), 0) \\ &= (v'_1(t), v'_2(t), 0) \\ &= v'. \end{aligned}$$

Beispiel 3.20. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre. Berechne die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes der Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow S, \quad c(t) = (\cos(t), \sin(t), 0).$$

Die gewöhnliche Ableitung von c ist $c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ und $c''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0) = -c(t)$. Wir wählen ein Einheitsnormalenvektorfeld $N(c(t)) = (\cos(t), \sin(t), 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}c'(t) &= c''(t) - \langle c'', N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\ &= (-\cos(t), -\sin(t), 0) - 1(\cos(t), \sin(t), 0) = 0. \end{aligned}$$

(Die Kurve c durchläuft gerade den Äquator von \mathbb{S}^2 und ist Geodätisch).

Lemma 3.21. Sei S eine reguläre Fläche, $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und sei $\varphi : J \rightarrow I$ eine Umparametrisierung. Seien ferner v und w Vektorfelder an S längs c . Dann sind auch $v + w$ und fv Vektorfelder an S längs c und es gilt:

- a) *Additivität:* $\frac{\nabla}{dt}(v + w)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t)$,
- b) *Produktregel I:* $\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) = f'(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t)$,
- c) *Produktregel II:* $\frac{d}{dt}I(v, w)(t) = I(\frac{\nabla}{dt}v(t), w(t)) + I(v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t))$,
- d) *Umparametrisierung:*

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi)(t) = \left(\frac{\nabla}{dt}v\right) \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = \varphi'(t)\left(\frac{\nabla}{dt}v\right) \circ \varphi(t).$$

Mit Hilfe lokaler Parametrisierungen berechnen kann man die kovariante Ableitung berechnen.

Sei (U, F, V) einer Parametrisierung der regulären Fläche S . Die Vektoren $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) \in \mathbb{R}^3$ sind darstellbar durch die Basis $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$, $\frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$ und $N(F(u))$:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}(u)N(F(u)),$$

wobei (h_{ij}) die Koeffizientenmatrix von der zweiten Fundamentalform ist.

Definition 3.22 (Christoffel-Symbole). Die Koeffizientenfunktionen

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R},$$

$1 \leq i, j, k \leq 2$, heißen *Christoffel-Symbole*.

Bemerkung. Die Christoffel-Symbole sind symmetrisch in den unteren Indizes, d.h. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, da $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}$.

Nun berechnen wir die lokale Formel für die kovariante Ableitung. Sei (U, F, V) einer Parametrisierung von S . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve mit $c(I) \subset V$. Setze $\tilde{c} := F^{-1} \circ c : I \rightarrow U$. Sei $v : I \rightarrow S$ ein glattes Vektorfeld an S längs c . Wir drücken v in der durch die Parametrisierung gegebenen Basis aus

$$v(t) = \xi^1(t) \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \xi^2(t) \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t))$$

und berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}v(t) &= \Pi_{c(t)}(v'(t)) \\ &= \Pi_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^2 (\dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \xi^i(t) \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) \dot{\tilde{c}}^j(t))\right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^2 (\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)). \end{aligned}$$

Ausgedrückt in der Koeffizientenfunktionen ξ^1 und ξ^2 entspricht die Kovariante Ableitung der folgenden Abbildung

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \\ \dot{\xi}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.23. Für die Christoffel-Symbole gilt die Formel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^m} \right\rangle \\ (\text{da } \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, N \right\rangle &= 0) &= \left\langle \sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj} \right). \end{aligned}$$

Analog haben wir

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{ji}^k g_{km} + \Gamma_{jm}^k g_{ki} \right)$$

und

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{mi}^k g_{kj} + \Gamma_{mj}^k g_{ki} \right).$$

Es folgt

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Hier haben wir benötigt, dass $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Durch Multiplikation mit (g^{km}) erhalten wir

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g_{mk}.$$

□

Bemerkung. Die kovariante Ableitung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Definition 3.24. Sei S eine reguläre Fläche, v ein Vektorfeld auf S , $w_p \in T_p S$ ein Tangentialvektor. Dann ist die kovariante Ableitung $\nabla_{w_p} v \in T_p S$

von v in Richtung w_p wie folgt definiert: Wähle eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = w_p$ und setze

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0).$$

Lemma 3.25. *Diese Definition hängt nicht davon ab, welche Kurve c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = w_p$ man nimmt.*

(Übung)

(*Hinweis.* Sie zeigen, dass die kovariante Ableitung in Richtung $w_p = \sum_{k=1}^2 \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$

$$(12) \quad \nabla_{w_p} \left(\sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) = \sum_k \left(\sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u) \eta^l + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i(u) \eta^j \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

gilt für $v = \sum_{k=1}^2 \xi^k(u) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$.)

Lemma 3.26. *Sei S eine reguläre Fläche, seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, v, v_1, v_2, w_1, w_2 und w Vektorfelder auf S , und sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt*

a) *Linearität im zu differenzierenden Vektorfeld:*

$$\nabla_w(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \nabla_w v_1 + c_2 \nabla_w v_2.$$

b) *Produktregel I:*

$$\nabla_w(fv) = df(w)v + f \nabla_w v.$$

c) *Produktregel II:*

$$dI(v_1, v_2)(w) = I(\nabla_w v_1, v_2) + I(v_1, \nabla_w v_2).$$

d) *Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:*

$$\nabla_{(c_1 w_1 + c_2 w_2)} v = c_1 \nabla_{w_1} v + c_2 \nabla_{w_2} v.$$

e) *Funktionen-Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:*

$$\nabla_{fw} v = f \nabla_w v.$$

Der Beweis von d) und f) folgert leicht aus (12).

3.3. Krümmungstensor und Theorema Egregium.

Definition 3.27 (die zweite kovariante Ableitung). Die zweite kovariante Ableitung von Z nach v und w ist durch

$$\nabla_{v,w}^2 z := \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

definiert.

Lemma 3.28. Sei S eine reguläre Fläche und v, w und z Vektorfelder auf S . Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Dann ist $\nabla_{v,w}^2 z$ in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^m}$ gegeben durch die Koeffizienten

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial z^i}{\partial u^k} (v^j w^k + w^j v^k) - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j \right. \\ \left. + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} + \sum_l (\Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ij}^l) \right) v^i w^j z^k \right)_{m=1,2}$$

Korollar 3.29. Der Wert der zweiten kovarianten Ableitung $\nabla_{v,w}^2 z$ hängt im Punkte $p \in S$ nur von $v(p)$, $w(p)$ und den Ableitung von z in p bis zur Ordnung 2 ab.

Damit können wir für ein Vektorfeld z auf S das zweite kovariante Differential von z definieren als

$$\begin{aligned} \nabla^2 z : T_p S \times T_p S &\rightarrow T_p S \\ (v_p, w_p) &\mapsto (\nabla_{v,w}^2 z)(p), \end{aligned}$$

wobei v und w beliebige Vektorfelder auf S mit $v(p) = v_p$ und $w(p) = w_p$ sind.

Beweis vom Lemma 3.28. Setze $\phi^k = \sum_l \frac{\partial z^k}{\partial u^l} w^l + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k z^i w^j$ ($k = 1, 2$). Aus (12) gilt

$$\nabla_w z = \sum_k \phi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

in der lokalen Parametrisierung. Für $\nabla_v(\nabla_w z)$ ergibt sich (für $\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned} &\sum_m \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u^m} v^m + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \phi^\beta v^\gamma \\ (13) \quad &= \sum_{m,l} \left(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^l v^m + \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m \right) \\ &+ \sum_{i,j,m} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial u^m} z^i w^j v^m + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^j v^m + \Gamma_{ij}^\alpha z^i \frac{\partial w^j}{\partial u^m} v^m \right) \\ &+ \sum_{j,\beta,\gamma} \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} w^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma + \sum_{i,j,\beta,\gamma} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^i w^j v^\gamma. \end{aligned}$$

Für $\nabla_v w$ setzen wir $\psi^k = \sum_l \frac{\partial w^k}{\partial u^l} v^l + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k w^i v^j$ ($k = 1, 2$) und erhalten für $\nabla_{\nabla_v} w z$ ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
(14) \quad & \sum_m \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \psi^m + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta \psi^\gamma \\
&= \sum_{l,m} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \frac{\partial w^m}{\partial u^l} v^l + \sum_{\alpha, \beta, m} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \Gamma_{ij}^m v^i w^j \\
&+ \sum_{l, \beta, \gamma} \frac{\partial w^\gamma}{\partial u^l} v^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta + \sum_{i, j, \beta, \gamma} \Gamma_{ij}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^i w^j z^\beta.
\end{aligned}$$

Bei Subtraktion von (13) und (14) heben sich die Terme weg, welche die Ableitungen von w enthalten. \blacksquare

Definition 3.30 (riemannscher Krümmungstensor). Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, $v_p, w_p \in T_p S$ Tangentialvektoren, und z ein Vektorfeld auf S . Dann ist der *riemannsche Krümmungstensor* definiert durch

$$R(v_p, w_p)z := \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z.$$

Lemma 3.31. *Der riemannsche Krümmungstensor hat bezüglich der lokalen Parametrisierung die Form wennn*

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{i, j, k, l=1}^2 R_{ijk}^l(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u_0),$$

wobei

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$$

Korollar 3.32. a) *Der Tangentialvektor $R(v_p, w_p)z$ hängt an der Stelle $p \in S$ nur von $z(p)$ ab, nicht aber von den Werten des Vektorfeld z auf $S - \{p\}$. Daher ist die Abbildung*

$$R_p : T_p S \times T_p S \rightarrow T_p S$$

$$R_p(v_p, w_p)z_p := R(v_p, w_p)z,$$

wohldefiniert, wobei z ein beliebiges Vektorfeld auf S mit $z(p) = z_p$ ist.

b) *R ist linear in jedem Argument, insbesondere*

$$R(v_p, w_p)(fz_p) = f \cdot R(v_p, w_p)z_p.$$

c) *R_p ist schiefsymmetrisch in der ersten beiden Argumenten*

$$R_p(v_p, w_p)z_p = -R_p(w_p, v_p)z_p.$$

Satz 3.33 (Gauß-Gleichung). Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine orientiert Fläche, $p \in S$. Dann gilt für $v, w, z \in T_p S$

$$R(v, w)z = II(w, z)W(v) - II(v, z)W(w).$$

Bezüglich einer lokalen Parametrisierung drückt sich dies folgendermaßen aus:

$$R_{ijk}^l = h_{jk}w_i^l - h_{ik}w_j^l.$$

Beweis: Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Erinnerung: (11)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij} \cdot (N \circ F).$$

Differenzieren wir die Gleichung nach u^l

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \cdot (N \circ F) + h_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial u^l} (N \circ F) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normallenanteil} \right) \\ &\quad + \text{Normallenanteil} + h_{ij} \cdot \left(-W \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\ &\quad + \text{Normallenanteil} \end{aligned}$$

Nach Satz von Schwarz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^m}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \sum_k \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\ &\quad + \text{Normallenanteil} \\ &= \sum_m \left(R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normalenanteil} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m = 0.$$

□

Satz 3.34 (Theorema Egregium). *Die Gauß-Krümmung kann folgendermaßen aus dem riemannschen Krümmungstensor berechnet werden: Sei $p \in S$ ein Punkt. Wähle eine orthonormalbasis v, w von $T_p S$. Dann gilt*

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Insbesondere ist die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis: Gemäß der Gauß-Gleichung gilt

$$\begin{aligned}
 I(R(v, w)w, v) &= I(II(w, w) \cdot W(v) - II(v, w) \cdot W(w), v) \\
 &= II(w, w)II(v, v) - II(v, w)^2 \\
 &= \det(W) = K.
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.35. Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, seien $v, w, x, y \in T_p S$. Der Krümmungstensor hat die folgenden Symmetrien:

- a) $R(v, w)x = -R(w, v)x$.
- b) $I(R(v, w)x, y) = -I(R(v, w)y, x)$.
- c) $I(R(v, w)x, y) = I(R(x, y)v, w)$.
- d) *Bianchi-Identität;*

$$R(v, w)x + R(x, v)w + R(w, x)v = 0.$$

Beweis: a) ist trivial. c) folgt aus der Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned}
 I(R(v, w)x, y) &= I(II(w, x) \cdot W(v) - II(v, x) \cdot W(w), y) \\
 &= II(w, x)II(v, y) - II(v, x)II(w, y),
 \end{aligned}$$

denn dieser Ausdruck ändert sich nicht bei Vertauschung der Paare v, w und x, y . b) folgt aus a) und c). d) folgt auch aus Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned}
 R(v, w)x + R(x, v)w + R(w, x)v &= II(w, x)W(v) - II(v, x)W(w) \\
 &\quad + II(v, w)W(x) - II(x, w)W(v) \\
 &\quad + II(x, v)W(w) - II(w, v)W(x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Größen der inneren Geometrie

1. Fundamentalform	I	
Flächenelement	dA	$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2$
kovariante Ableitung	∇	$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$
riemannscher Krümmungstensor	R	$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$
Gauß-Krümmung	K	$K = \frac{1}{2} \sum_{ijk} g^{jk} R_{ijk}^i$

Größen, die nicht unter lokalen Isometrien invariant sind

2. Fundamentalform	II	h_{ij}
Weingarten-Abbildung	W	$w_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$
Hauptkrümmungen	κ_i	
mittlere Krümmung	H	$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$

3.4. Riemannsche Metriken.

Definition 3.36 (riemannsche Metrik). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Eine *riemannsche Metrik* g auf S ordnet jedem Punkte $p \in S$ ein euklidische Skalarprodukt g_p auf der Tangentialebene $T_p S$ zu, so dass für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Funktion

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{ij}(u) := g_{F(u)}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u)\right).$$

glatt sind.

Bemerkung. Die erste Fundamentalform ist natürlich ein Beispiel für eine riemannsche Metrik. Es gibt aber auch andere wichtige Beispiele von riemannschen Metriken, die nicht erste Fundamentalform sind. Die riemannsche Metrik also ist eine verallgemeinerte erste Fundamentalform.

Alle Größen der inneren Geometrie, wie Flächenelement, kovariante Ableitung, Gauß-Krümmung und riemannsche Krümmungstensor, sind auch für reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik definiert.

Definition 3.37. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Wir definieren:

a) (Die Christoffel-Symbole)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

b) (Die kovariante Ableitung) Für Vektorfelder $v = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$ und $w = \sum_i w^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$ ist die kovariante Ableitung definiert durch

$$\nabla_w v(F(u)) := \sum_k (d_u v^k \left(\begin{matrix} w^1(u) \\ w^2(u) \end{matrix} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(u) v^i(u) w^j(u)) \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

c) (Der riemannsche Krümmungstensor)

$$R(v, w)z := \nabla_{v,w}^2 z - \nabla_{w,v}^2 z$$

$$=: \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l(u) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u),$$

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$$

d) (Die Gauß-Krümmung)

$$K(p) = g(R(v, w)w, v)$$

für eine Orthonormalbasis v, w von $T_p S$ bzgl g .

Beispiel 3.38. Der Torus mit der Parametrisierung

$$F(t, \varphi) = \begin{pmatrix} (1 - r \cos \varphi) \cos t \\ (1 - r \cos \varphi) \sin t \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } r < 1.$$

Für die erste Fundamentalform I erhalten wir

$$\begin{aligned} I\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= g_{11}(t, \varphi) = r^2 \\ I\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{12}(t, \varphi) = 0 \\ I\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{22}(t, \varphi) = (1 - r \cos \varphi)^2. \end{aligned}$$

Also die beiden Vektoren $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi)$ und $\frac{\partial F}{\partial \phi}(t, \varphi)$ sind zwar eine Basis der Tangentialebene $T_{F(t, \varphi)}S$, aber sie sind bezüglich der ersten Fundamentalform i.A. nicht orthonormal. Nun definieren wir eine neue riemannsche Metrik, so dass

$$\begin{aligned} g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) = 1 \\ g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Man muss nachprüfen, ob g wohldefiniert ist. In obiger Parametrisierung hat die riemannsche Metrik die Komponenten

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die g_{ij} konstant sind, verschwinden alle Christoffel-Symbole, damit auch der riemannsche Krümmungstensor und die Gauß-Krümmung $K \equiv 0$.

Aber die Gauß-Krümmung für den Torus ist

$$K(t, \varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{1 - r \cos \varphi}.$$

Also ist g keine erste Fundamentalform. Es ist auch nicht möglich, dass g die erste Fundamentalform auf einer kompakten Fläche, da dann die Gauß-Krümmung irgendwo positiv sein muss.

Definition 3.39 (zurückgezogene riemannsche Metrik). Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen, sei $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ ein Diffeomorphismus. Sei g eine riemannsche Metrik auf S_2 . Die *zurückgezogene riemannsche Metrik* $\Phi^*(g)$ aus S_1 ist definiert durch

$$(\Phi^*(g))_p(X, Y) := g_{\Phi(p)}(d_p \Phi(X), d_p \Phi(Y))$$

für alle $p \in S_1$, $X, Y \in T_p S_1$.

Bemerkungen.

- (a) $\phi^*(g)$ ist eine riemannsche Metrik
- (b) $\phi^*(g)$ ist eine eindeutige riemannsche Metrik auf S_1 , für die $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie ist.
- (c) Ist F eine lokale Parametrisierung von S_1 , dann ist $\phi \circ F$ eine solche von S_2 .

Sei $F_2 = \phi \circ F$ ($p = F(u)$)

$$\begin{aligned}
 ((\phi^*g)_{F(u)})_{ij}(u) &= (\phi^*g)_{F(u)}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j}\right) \\
 &\stackrel{\text{Def.3.38}}{=} g_{\phi \circ F(u)}\left(d_p\phi\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right), d_p\phi\left(\frac{\partial F}{\partial u^j}\right)\right) \\
 &\stackrel{\text{KR}}{=} g_{\phi \circ F(u)}\left(\frac{\partial(\phi \circ F)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\phi \circ F)}{\partial u^j}\right) \\
 &= g_{ij}(u)
 \end{aligned}$$

(d) $K_{\phi^*(g)} = K_g \circ \phi$.

Beispiel 3.40. Sei $S_1 = \mathbb{S}^2$ die Sphäre. Sei $S_2 = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ ein Ellipsoid. $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, $\phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ ist ein Diffeomorphismus. Sei I die erste Fundamentalform von S_2 und $g = \phi^*(I)$ die zurückgezogene riemannsche Metrik. g stimmt nicht mit der ersten Fundamentalform von \mathbb{S}^2 überein, da die Gauß-Krümmung des Ellipsoids nicht konstant ist, und damit auch nicht die zurückgezogene Metrik g .

3.5. Geodätische.

Definition 3.41 (die Länge). Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Länge* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$L[c] := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Falls g die erste Fundamentalform ist, stimmt dieser Längenbegriff gegeben früher überein.

Definition 3.42 (die Energie). Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Energie* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_I g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) dt.$$

Lemma 3.43. *ei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : [a, b] \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist*

$$L[c]^2 \leq 2(b-a)E[c]$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d.h., wenn

$$g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) \equiv \text{const.}$$

Beweis: Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} L[c]^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) dt \int_a^b 1^2 dt \\ &= 2(b-a)E[c]. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$ konstant ist. □

Lemma 3.44. *Sei S eine reguläre fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \times J \rightarrow S$, $(s, t) \rightarrow c(s, t)$, eine glatte Abbildung. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}.$$

Beweis: Da $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}$, wissen wir $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung. Setze

$$\xi : I \times J \rightarrow U, \quad \xi := F^{-1} \circ c.$$

Es gilt also $c = F \circ \xi$ und nach der Kettenregel daher

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial u^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \xi^k}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Es folgt nach Definition

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial s \partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \frac{\partial \xi^j}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Analog

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s} = \sum_k \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial t \partial s} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial s} \frac{\partial \xi^j}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Nach $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, folgt $\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}$. \square

Satz 3.45 (Variation der Energie). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow S$, eine glatte Abbildung, so dass für $c_s : [a, b] \rightarrow S$, $c_s(t) := c(s, t)$, gilt $c_s(a) = p$, $c_s(b) = q$. Sei $V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ das so genannte Variationsvektorfeld längs $c_0 = c(0, \cdot)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} = - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t), V(t) \right) dt.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g_{c_s(t)} (c'_s(t), c'_s(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} c'_s(t), c'_0(t) \right) + g_{c_0(t)} \left(c'_0(t), \frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} c'_s(t) \right) dt \\ &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t}(0, t), c'_0(t) \right) dt \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.44}}{=} \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}(0, t), c'_0(t) \right) dt \\ &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right) dt \end{aligned}$$

Wegen $V(a) = V(b) = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt + g_{c_0(t)} (V(t), c'_0(t)) \Big|_a^b \\ &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.46. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Sei $c : [a, b] \rightarrow S$, eine Verbindungskurve von p nach q mit minimaler Energie, so gilt

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = 0.$$

Definition 3.47 (die Geodätische). Sei S eine reguläre Fläche, I ein Intervall. Eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow S$ heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = 0,$$

für alle $t \in I$ gilt.

Beispiel 3.48. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die x - y -Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. In diesem Fall stimmt die kovariante Ableitung mit der gewöhnlichen Ableitung überein

$$\frac{\nabla}{dt} c'(t) = c''(t).$$

Also sind die Geodätischen von folgender Form

$$c(t) = p + zv.$$

Beweis: (Beweis von Korollar 3.46) Aus Stetigkeitsgründen genügt es, die Behauptung für alle $t \in (a, b)$ zu zeigen. Angenommen, für ein $t_0 \in (a, b)$ wäre $\frac{\nabla}{dt} c'_0(t_0) \neq 0$. Wir wählen eine lokale Parametrisierung (U, F, V) und $\delta > 0$, so dass $c(t_0) \in V$ und

- $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$
- $c_0(t) \in V$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Setze

$$u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow U, \quad u(t) := F^{-1}(c_0(t))$$

und

$$X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(t) := (D_{u(t)} F)^{-1} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right).$$

Aus der Definition folgt also

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = D_{u(t)} F(X(t)).$$

Wir wählen eine glatte Funktion $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \geq 0$, $\varphi(t_0) > 0$ und $\text{Supp}(\varphi) \subset\subset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dass $u(t) + sX(t) \in U$. Nun definieren wir

$$c_s(t) := F(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \subset V \subset S$$

für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ setzen wir $c_s(t) := c(t)$. Das Variationsfeld ist

$$(15) \quad V(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [a, b] - [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ \varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'(t) & \text{für } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Z.z.: (15); für $t \in [a, b] - [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gilt offensichtlich

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c_s(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} F(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \\ \stackrel{KR}{=} D_{u(t)} F(\varphi(t)X(t)) = \varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t).$$

Nach dem Satz 3.45 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi_{c_0(t)} \left(\varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt < 0. \end{aligned}$$

Wegen der Energieminimalität der Kurve c_0 muss

$$\frac{d}{dt} E[c_s] \Big|_{s=0} = 0$$

gelten, dies ist ein Widerspruch. \square

Beispiel 3.49. Sei $S = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre, Wir haben bereits gesehen, dass von den Breitenkreisen

$$c(t) = (\cos t \cos \theta, \sin t \cos \theta, \sin \theta),$$

θ fest, lediglich der Äquator $\theta = 0$ die Geodätengleichung erfüllt.

Lemma 3.50. *Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Sei c eine Geodätische. Wir differenzieren und verwenden die Produktregel II

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = g_{c(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'(t), c'(t) \right) + \left(c'(t), \frac{\nabla}{dt} c'(t) \right) = 0.$$

Also ist $g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$ konstant. \square

Lemma 3.51. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Ist $c_0 : [a, b] \rightarrow S$ eine Verbindungskurve von p nach q . c_0 ist minimale Energie genau dann, wenn sie minimale Länge hat und proportional zur Bogenlänge.*

Beweis: " \Rightarrow ": Sei c_0 minimale Energie. Angenommen, es gäbe eine Verbindungskurve von p nach q , so dass $L[c] < L[c_0]$. Da sich die Länge einer parametrisierten Kurve bei einer Umparametrisierung nicht ändert, können wir annehmen, dass c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Somit

$$L[c] = 2(b-a)E(c) \geq 2(b-a)E(c_0) \geq L[c_0],$$

ein Widerspruch. Es folgt also $L[c] \geq L[c_0]$ für alle Verbindungskurven. Wähle nun eine Umparametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ so, dass $\tilde{c}_0 = c_0 \circ \varphi$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Wir erhalten

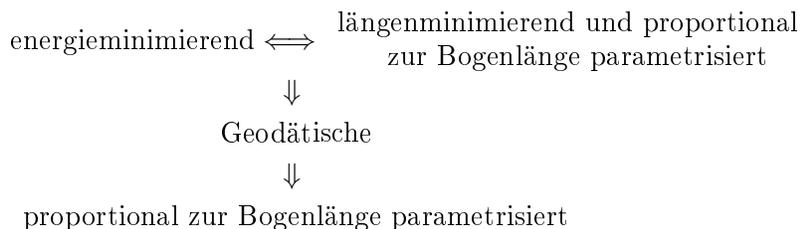
$$L[c_0] = L[\tilde{c}] = 2(b-a)E(\tilde{c}) \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} 2(b-a)E(c_0).$$

Damit ist c_0 auch proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

" \Leftarrow ": Für jede Verbindungskurve c gilt

$$E(c) \geq \frac{1}{2(b-a)}L[c] \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} \frac{1}{2(b-a)}L[c_0] = E(c_0).$$

□



Es existiert eine Geodätische, die nicht energieminimierend ist.

Die Geodätengleichung in der lokalen Parametrisierung:

Für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S und eine Kurve c schreiben wir, wo definiert, $u := f^{-1} \circ c$, d.h., $c = F \circ u$. Die Geodätengleichung lautet dann

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(u(t)) \frac{\partial}{\partial t} u^i(t) \frac{\partial}{\partial t} u^j(t) = 0, \quad \text{für } k = 1, 2.$$

Diese ist ein System (nichtlinearer) gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Satz 3.52 (Existenz von Geodätischen). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Seien $p \in S$, $v \in T_p S$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine Geodätische $c : I \rightarrow S$ mit den "Anfangsbedingung"*

$$c(t_0) = p \text{ und } c'(t_0) = v.$$

Beweis: Wir wählen eine lokale Parametrisierung (U, F, V) so, dass $p \in V$. Setze $u_0 := F^{-1}(p) \in U$ und $X := (D_u \circ F^{-1})(v) \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat die Geodätengleichung

(16) mit den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $u'(t_0) = X$ eine Lösung $u(t)$. Mit $c := F \circ u$ haben wir dann eine Geodätische mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. □

Satz 3.53 (Eindeutigkeit von Geodätischen). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$. Sei $c : I \rightarrow S$ eine Geodätische. Dann ist c durch $c(t_0) \in S$ und $c'(t_0) \in T_{c(t_0)}S$ eindeutig festgelegt.*

Beweis: Wenn wir wüssten, dass die Spur von c ganz in einem Parameterbereich enthalten ist, könnten wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.52 argumentieren und bekommen die Eindeutigkeit der Geodätischen. Dies können wir jedoch nicht voraussetzen. Also benutzen wir ein Widerspruchargument. Seien c_1 und c_2 Geodätische mit denselben Anfangsbedingungen $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Angenommen es existiert ein $t \in I$, $t > t_0$ mit $c_1(t) \neq c_2(t)$. Setze

$$t_1 = \sup \left\{ t \in I \mid t > t_0, \text{ so dass } c_1(\tau) = c_2(\tau) \text{ für alle } \tau \in [t_0, t] \right\}.$$

Nun wählen wir eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $c_1(t_0) \in V$. Wegen $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t > t_0$ gilt $c(t_1) = c_2(t_1)$ und $c_1'(t_1) = c_2'(t_1)$. Der Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen sagt uns nun, dass $c_1(t) = c_2(t)$ solange $c_1(t) \in V$ und $c_2(t) \in V$, damit $c_1(t) = c_2(t)$ für $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ hinreichend $\varepsilon > 0$, ein Widerspruch. □

Satz 3.54 (Clairaut). *Sei S eine Drehfläche, gegeben durch die Parametrisierung $F(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, t)$. Wir nehmen die erste Fundamentalform als riemannsche Metrik. Sei $c : I \rightarrow S$ eine Geodätische, $c(t) = F(r(t), \varphi(t))$. Sei $\theta(t)$ der Winkel zwischen $c'(t)$ und dem Breitenkreis durch $c(t)$. Dann ist*

$$r(t) \cos(\theta(t)) = \text{const.}$$

Beweis: Die erste Fundamentalform wurde im Abschnitt über Drehflächen bereits berechnet. Sie ist

$$(g_{ij}(t, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + r(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$v := \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{und} \quad w := \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Das Vektorfeld w ist stets tangential an die Breitenkreise und v an die Meridiane. Wir berechnen

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, w \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (g_{22}) = 0.$$

Da $\langle v, w \rangle = 0$ gilt, ist der Tangentialteil von $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$ proportional zu v ,

$$\nabla_w w = \alpha v$$

für geeignete Funktion α . Ähnlich haben wir

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial t}, v \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (g_{11}) = 0$$

und damit

$$\nabla_w v = \beta w$$

für eine geeignete Funktion β . Ferner haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle \stackrel{\text{Produktregel II}}{=} \langle \nabla_w v, w \rangle + \langle v, \nabla_w w \rangle \\ &= \langle \beta w, w \rangle + \langle v, \alpha v \rangle \\ &= \beta |w|^2 + \alpha |v|^2. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Tangentialvektor $z = \gamma v + \delta w$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \nabla_z w, z \rangle &= \gamma^2 \underbrace{\langle \nabla_v w, v \rangle}_{=0} + \gamma \delta \left\langle \underbrace{\nabla_w w}_{\alpha v}, v \right\rangle \\ &\quad + \gamma \delta \left\langle \underbrace{\nabla_v w}_{\beta w}, w \right\rangle + \delta^2 \underbrace{\langle \nabla_w w, w \rangle}_{=0} \\ &= \gamma \delta (\alpha |v|^2 + \beta |w|^2) = 0. \end{aligned}$$

Für eine Geodätische c gilt also

$$\frac{d}{dt} \langle w(c(t)), c'(t) \rangle = \underbrace{\langle \nabla_{c'(t)} w, c'(t) \rangle}_{=0} + \left\langle w(c(t)), \underbrace{\nabla_{c'(t)} c'(t)}_{=0} \right\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle w(c(t)), c'(t) \rangle = \text{const.} \cos(\theta(t)) r(t) = \text{const.}$ □

Lemma und Definition 3.55. *Sei S eine orientierte reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld längs c , das c' zu positiv orientierten Orthonormalbasen ergänzt, d.h. für jedes $t \in I$ ist $(c'(t), n(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_{c(t)}S$. Dann gilt*

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} c'(t), c'(t) \right\rangle = 0,$$

d.h., $\frac{\nabla}{dt} c'(t)$ ist proportional zu $n(t)$. Wir nennen die Funktion

$$\kappa_g := \left\langle \frac{\nabla}{dt} c'(t), n(t) \right\rangle$$

geodätische Krümmung von c in S bzgl. g . Aus der Definition ist klar, dass c genau dann eine Geodätische ist, wenn $\kappa_g \equiv 0$. Die geodätische Krümmung

ist eine verallgemeinerte Krümmung ebener Kurven. Falls S die $x-y$ -Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannsche Metrik ist, ist κ_g gerade die Krümmung von c .

3.6. Exponentialabbildung. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$ ein Punkt. Zu einem Tangentialvektor $v \in T_p S$ betrachten wir die (eindeutige) Geodätische $c : I \rightarrow S$ mit $c(0) = p$, $c'(0) = v$ und maximalem Definitionsintervall I . Falls c noch zur Zeit $t = 1$ definiert ist, d.h. falls $1 \in I$, setzen wir

$$(17) \quad \exp_p(v) := c(1).$$

Ist \exp_p für $v \in T_p S$ definiert und $\delta \in (0, 1]$, so ist \exp_p für $\delta v \in T_p S$ auch definiert. (Aufgabe: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g , sei $p \in S$ und $v \in T_p S$. Sei c die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Sei $\delta \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Sie zeigen, dass die Kurve $\tilde{c}(t) := c(\delta t)$ die Geodätische mit den Anfangsbedingungen $\tilde{c}(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = \delta v$.) Diese Überlegung zeigt, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}_p \subset T_p S$ von \exp_p eine bzgl. sternförmige Teilmenge von $T_p S$ ist und zwar

$$c_v(t) = \exp_p(tv).$$

Nach dem Satz über die Abhängigkeit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten ist \mathcal{D}_p eine offene Teilmenge von $T_p S$ und ist

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow S$$

eine glatte Abbildung.

Definition 3.56 (Exponentialabbildung). Die Abbildung $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow S$ heißt *Exponentialabbildung*.

Beispiel 3.57. Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die $x - y$ -Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannsche Metrik. Sei $p \in S$ und $v \in T_p S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Die geodätische c in S mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ ist die Gerade $c(t) = p + tv$. Also gilt $\mathcal{D}_p = T_p S^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und

$$\exp_p v = p + v.$$

Beispiel 3.58. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre, wiederum mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. Sei $p \in S$ und $v \in T_p S = p^\perp$. Schreibe $v = \delta w$, wobei $w \in T_p S$ ein Einheitsvektor ist, $\|w\| = 1$ und $\delta = \|v\| \geq 0$. Die Geodätische c in S mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ ist gegeben durch den Großkreis

$$c(t) = \cos(\delta t)p + \sin(\delta t)w.$$

Also gilt $\mathcal{D}_p = T_p S$ und

$$\exp_p(v) = \begin{cases} \cos(\|v\|)p + \sin(\|v\|) \frac{v}{\|v\|}, & v \neq 0 \\ p, & v = 0. \end{cases}$$

Lemma 3.59. *Das Differential der Exponentialabbildung an der Stelle 0 ist die Identität,*

$$d_0 \exp_p = id : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Beweis: Sei $v \in T_p S$. Gemäß (17) ist die Geodätische c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$ gegeben durch

$$c(t) = \exp_p(tv).$$

Setze $\tau(t) = tv$. τ ist eine Kurve in $T_p S$ mit $\tau(0) = 0$ und $\tau'(0) = v$. Nach der Definition des Differentials haben wir

$$\begin{aligned} d_0 \exp_p(v) &= \frac{d}{dt} \exp_p(\tau(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} c(t) \Big|_{t=0} = c'(0) = v. \end{aligned}$$

□

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung W von $0 \in \mathcal{D}_p$, so dass $\exp_p|_W : W \rightarrow \exp_p(W) \subset S$ ein Diffeomorphismus ist.

Für eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) der Tangentialebene $T_p S$ erhalten wir durch die Wahlen $U := F_1^{-1}(W)$, $F := \exp_p \circ F_1|_U$ und $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $V \cap S = \exp_p(W)$ eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S .

Beispiel 3.60. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis der Tangentialebene $T_p S$. Wir nehmen die Parametrisierung durch kartesische Koordinaten für $T_p S$, nämlich $U_1 = \mathbb{R}^2$ und $F_1(u^1, u^2) = \sum u^i X_i$. Die entsprechende lokale Parametrisierung von S ,

$$F(u^1, u^2) = \exp_p\left(\sum u^i X_i\right),$$

heißt *Parametrisierung durch riemannsche Normalkoordinaten* (um Punkt p).

Satz 3.61 (Eigenschaften der riemannschen Normalkoordinaten). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $p \in S$, sei F eine lokale Parametrisierung durch riemannsche Normalkoordinaten um den Punkt p . Dann gilt für die zugehörige Komponentenfunktionen der Metrik und die Christoffel-Symbole*

- i) $F(0, 0) = p$
- ii) $g_{ij}(0, 0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$
- iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, 0) = 0$ und $\Gamma_{ij}^k(0, 0) = 0$, $i, j, k = 1, 2$.

Beweis: Aussage i) ist klar und Aussage ii) besagt gerade, dass $d_0 \exp_p$ eine Identität ist. Nun brauchen wir nur noch iii) zu zeigen. Nach der Definition der Exponentialabbildung wissen wir, dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow tx$ eine Geodätische in riemannschen Normalkoordinaten ist, d.h.

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(tx) x^i x^j = 0 \quad k = 1, 2.$$

Speziell für $t = 0$ gilt somit

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) x^i x^j = 0, \quad k = 1, 2$$

für alle x . Wegen der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k(0) = \Gamma_{ji}^k(0)$, folgt

$$\Gamma_{ij}^k(0, 0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jm} = \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj} \right)$$

folgt

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, 0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k.$$

□

Beispiel 3.62. Sei wie oben S eine beliebige reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik, sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von $T_p S$. Wir nehmen diesmal Polarkoordinaten für $T_p S$, $F_1(r, \varphi) = r \cdot (\cos(\varphi)X_1, \sin(\varphi)X_2)$. Die zugehörige lokale Parametrisierung von S

$$F(r, \varphi) = \exp_p(r \cdot (\cos(\varphi)X_1, \sin(\varphi)X_2))$$

ist die *Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten* (um den Punkt p).

Satz 3.63 (Gauß-Lemma). *Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik. Sei $p \in S$, und sei F eine lokale Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten (r, φ) . Dann hat bzgl. dieser lokalen Parametrisierung die riemannsche Metrik die Form*

$$(g_{ij}(r, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

mit einer positiven Funktion f , die

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) = 1$$

erfüllt.

Beweis: Für festes φ_0 ist die Kurve $c(r) = F(r, \varphi_0)$ nach Definition der Exponentialabbildung die Geodätische mit $c'(0) = \cos \varphi_0 X_1 + \sin \varphi_0 X_2$. Wir haben schon bewiesen, dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Da $c'(0)$ ein Einheitsvektor ist, so ist

$$g_{11}(r, \varphi_0) = g(c'(r), c'(r)) = 1.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{12}}{\partial r}(r, \varphi_0) &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r, \varphi_0)} g \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \\
&= g \left(\frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi_0), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) + g \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \\
&= g \left(\underbrace{\frac{\nabla}{\partial r} c'(r)}_{=0}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) + g \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \\
&= g \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi_0), \frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underbrace{g \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r} \right)}_{=1} \Big|_{(r, \varphi_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist für festes $\varphi = \varphi_0$ die Funktion g_{12} konstant in r . Setze $Y_1 := \cos \varphi_0 X_1 + \sin \varphi_0 X_2$ und $Y_2 := -\sin \varphi_0 X_1 + \cos \varphi_0 X_2$. Dies ist auch die Orthonormalbasis von $T_p S$. Setze $\tilde{F}(r, \varphi) = r(\cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_2)$. Klar ist

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi_0) = Y_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) = rY_2.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} g_{12}(r, \varphi_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} g \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi_0), \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} g \left(d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \varphi_0) \right), d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \right) \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} g \left(d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(Y_1), d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(rY_2) \right) \\
&= g(d_0 \exp_p(Y_1), d_0 \exp_p(0)) = 0.
\end{aligned}$$

Da g_{12} konstant ist, ist $g_{12} = g_{21} = 0$. Also

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Da die riemannsche Metrik positiv definit ist, ist $g_{22} > 0$ und kann in der Form $g_{22} = f^2$ geschrieben werden. Ähnlich wie früher berechnen wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} f^2 &= \lim_{r \rightarrow 0} g_{22}(r, \varphi_0) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} g \left(d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right), d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) \right) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} g \left(d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(rY_1), d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(rY_2) \right) \\ &= g(d_0 \exp_p(0), d_0 \exp_p(0)) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r, \varphi_0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{g_{22}(r, \varphi_0)}{r^2}} \\ &= \sqrt{\lim_{r \rightarrow 0} g \left(d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(Y_2), d_{\tilde{F}(r, \varphi_0)} \exp_p(Y_2) \right)} \\ &= \sqrt{g(d_0 \exp_p(Y_2), d_0 \exp_p(Y_2))} = \sqrt{g(Y_2, Y_2)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.64. *Seien die Bezeichnungen wie in Satz 3.63. Dann gilt für die Gauß-Kümmung*

$$K(F(r, \varphi)) = -\frac{1}{f(r, \varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \varphi).$$

Beweis: Gemäß Satz 3.63 hat die riemannsche Metrik in geodätischen Polarkoordinaten die Form

$$(g_{ij}(r, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(r, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist

$$(g^{ij}(r, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^{-2}(r, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Man berechnet durch die Formel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g$

$$\Gamma_{22}^1 = -f \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{und} \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

die Christoffel-Symbole, die nicht verschwinden. Die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial r}$ und $\frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ bilden eine Orthonormalbasis der Tangentialebene. Nach dem Theorema

Egregium ist die Gauß-Krümmung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\kappa &= g \left(R \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right) \\
&= \frac{1}{f^2} R_{122}^1 \\
&= \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial \varphi} + \Gamma_{1k}^1 \Gamma_{22}^k - \Gamma_{2k}^1 \Gamma_{22}^k \right) \\
&= \frac{1}{f^2} \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 0 + 0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2 \right) \\
&= \frac{1}{f^2} \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial r^2} \right)^2 \right) \\
&= - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. In geodätischen Polarkoordinaten ist die gesamte Information über die riemannsche Metrik in der Funktion f enthalten. Falls die Gauß-Krümmung $k = \kappa$ konstant ist, d.h.,

$$\kappa = - \frac{1}{f(r, \varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \varphi),$$

(mit den Anfangsbedingungen $f(0, \varphi) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial r}(0, \varphi) = 1$) erhalten wir

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0 \\ r, & \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}r), & \kappa < 0. \end{cases}$$

Da die riemannsche Metrik positiv definit ist, ist $g_{22} > 0$ und kann in der Form $g_{22} = f^2$ geschrieben werden.

Korollar 3.65. *Sind S_1 und S_2 zwei reguläre Flächen mit derselben konstanten Gauß-Krümmung κ , so sind S_1 und S_2 lokal isometrisch.*

Es gibt noch Koordinaten, die besonders an eine vorgegebene Kurve auf der Fläche angepasst sind.

Lemma 3.66. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei $c : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs c mit $\|n(t)\| = 1$ und $\langle c', n \rangle \equiv 0$. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \quad F(t, s) := \exp_{c(t)}(sn(t)),$$

eine lokale Parametrisierung von S ist. Längs c hat die riemannsche Metrik bezüglich dieser Parametrisierung die Gestalt

$$(g_{ij}(t,0))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,0) = \frac{d}{dt} \exp_{c(t)}(0) = c'(t)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t,0) = d_{c(t)} \exp_{c(t)}(n(t)) = n(t).$$

Die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial t}(t,0)$ und $\frac{\partial F}{\partial s}(t,0)$ bilden eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}S$. Nach dem Umkehrsatz ist F nach geeigneter Einschränkung eine lokale Parametrisierung. Wegen der Orthogonalität ist die Behauptung über $g_{ij}(t,0)$ klar. \square

3.7. Parallelverschiebung.

Definition 3.67. Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine glatte Kurve und $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs c . Dann heißt v parallel, falls

$$\frac{\nabla}{dt}v \equiv 0.$$

Bemerkung. Somit ist eine glatte Kurve c eine Geodätische genau dann, wenn das Geschwindigkeitsfeld c' parallel ist.

Sei (U, F, V) eine lokal Parametrisierung, die die Spur der Kurve c enthält, $c(I) \subset V$. Schreibe $v(t) = \sum_k \xi^k(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u(t))$, wobei $F \circ u = c$. Zur Erinnerung

$$\frac{\nabla}{dt}v = 0$$

ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\xi^k(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(u(t))\xi^i \frac{d}{dt}u^j(t) = 0, \quad \text{für } k = 1, 2$$

wobei $u(t) = F^{-1}(c(t))$.

Satz 3.68. (*Existenz und Eindeutigkeit des parallelen Vektorfeldes*) Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine glatte Kurve, $t_0 \in I$, $v_0 \in T_{c(t_0)}S$. Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld v längs c mit $v(t_0) = v_0$.

Definition 3.69. Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow S$ eine glatte Kurve. Die Abbildung $P_c : T_{c(t_0)}S \rightarrow T_{c(t_1)}S$, die v_0 auf $v_1(t)$ abbildet, wobei v das eindeutige parallele Vektorfeld längs c mit $v(t_0) = v_0$ ist, heißt *Parallelverschiebung* längs c .

Proposition 3.70. Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow S$ eine glatte Kurve. Dann gilt:

- i) Ist $v_0 \in T_{c(t_0)}S$, dann ist das parallele Vektorfeld längs c mit $v(t_0) = v_0$ gegeben durch $v(t) = P_{c|[t_0, t_1]}(v_0)$.
- ii) Die Parallelverschiebung $P_c : T_{c(t_0)}S \rightarrow T_{c(t_1)}S$ ist eine lineare Isometrie.
- iii) Die Parallelverschiebung ist verträglich mit Umparametrisierung von Kurven, d.h. ist v parallel längs c und $\varphi : J \rightarrow [t_0, t_1]$ eine Umparametrisierung von c , so ist $v \circ \varphi$ parallel längs $c \circ \varphi$.

Beweis: Punkt i) folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Parallelverschiebung. ii) Linearität. Seien v_0 und w_0 aus $T_{c(t_0)}S$, und v und w die parallelen

Vektorfelder längs c mit $v(t_0) = v_0$ und $w(t_0) = w_0$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist das Vektorfeld $z(t) := \alpha v(t) + \beta w(t)$ parallel längs c , denn

$$\frac{\nabla}{dt} z = \alpha \frac{\nabla}{dt} v + \beta \frac{\nabla}{dt} w = 0.$$

Das Feld z erfüllt $z(t_0) = \alpha v_0 + \beta w_0$. Somit gilt

$$P_c(\alpha v_0 + \beta w_0) = z(t_1) = \alpha v(t_1) + \beta w(t_1) = \alpha P_c(v_0) + \beta P_c(w_0),$$

die Linearität der Parallelverschiebung.

Isometrie. Für zwei parallele Felder v und w längs c gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(v, w) &= g\left(\frac{\nabla}{dt} v, w\right) + g\left(v, \frac{\nabla}{dt} w\right) \\ &= g(0, w) + g(v, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $g_{c(t_0)}(v(t_0), w(t_0)) = g_{c(t_1)}(v(t_1), w(t_1))$, d.h.

$$g_{c(t_0)}(v(t_0), w(t_0)) = g_{c(t_1)}(P_c(v_0), P_c(w_0)).$$

Punkt iii) folgt aus $\frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi) = \dot{\varphi} \left(\frac{\nabla}{dt} v \circ \varphi\right) = 0$. □

Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung ein Konzept der inneren Geometrie ist. Genauer heißt es: Ist $c : I \rightarrow S_1$ eine glatte Kurve, v ein glattes Vektorfeld längs c und $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine lokale Isometrie, dann ist v parallel längs c genau dann, wenn $df \circ v$ parallel längs $f \circ c$. Folgern Sie daraus ferner, dass für $I = [t_0, t_1]$, $c(t_0) = p$, $c(t_1) = q$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{P_c} & T_q S_1 \\ \downarrow d_p f & & \downarrow d_q f \\ T_{f(p)} S_1 & \xrightarrow{P_{f \circ c}} & T_{f(q)} S_2 \end{array}$$

Beispiel 3.71. Sei S die Kegelfläche

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta)^T \mid \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{3} \zeta^2, \zeta < 0 \right\}.$$

Sei $\tilde{S} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die $x - y$ -Ebene. Die Abbildung

$$f : \tilde{S} \rightarrow S, \quad f(x, y, 0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 - y^2, 2xy, -\sqrt{3}(x^2 + y^2) \right)$$

ist eine lokale Isometrie. Wir betrachten die parallelen Vektorfelder längs der Kurve

$$c : [0, \pi] \rightarrow S, \quad c(t) = \frac{1}{2} \left(\sin(2t), \cos(2t), -\sqrt{3} \right).$$

Für die Kurve

$$\tilde{c} : [0, \pi] \rightarrow \tilde{S}, \quad \tilde{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

gilt $c = f \circ \tilde{c}$. In der Ebene sind die parallelen Vektorfelder gerade die konstanten Vektorfelder. So ist z.B. das Vektorfeld $\tilde{v}(t) = (1, 0, 0)$ parallel längs \tilde{c} . Folglich ist $v := df \circ \tilde{v}$ parallel längs c in S . Nach dem berechnen gilt

$$v(t) = \left(\cos(t) \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2t) \right), \sin(t)^3, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(t) \right).$$

Insbesondere gilt $v(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ und $v(\pi) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ und $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)$.

3.8. Jacobi-Felder.

Definition 3.72. Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei c eine Geodätische. Ein glattes Vektorfeld J längs c heißt *Jacobi-Feld*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = -R(J, c')c'.$$

Bemerkung. Diese Jacobi-Feld-Gleichung ist eine lineare gewöhnliche DGL zweiter Ordnung an J . Daher können wir für t_0 aus dem Definitionsintervall I von c die Anfangswerte $J(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt} J(t_0)$ in $T_{c(t_0)}$ beliebig vorgeben und erhalten dazu eine eindeutige Lösung dieser Gleichung, definiert auf ganz I . Die Menge aller Jacobifelder ist ein 4-dimensionaler Vektorraum.

Definition 3.73. Sei S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Sei $c_0 : I \rightarrow S$ eine Geodätische auf S . Eine *geodätische Variation* von c_0 ist eine glatte Abbildung $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow S$, $\varepsilon > 0$, so dass jede $c_s : I \rightarrow S$, $c_s(t) := c(s, t)$, eine Geodätische ist, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Proposition 3.74. *Ist c eine geodätische Variation auf S , so ist das zugehörige Variationsfeld $J(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ ein Jacobi-Feld. Ist umgekehrt J ein Jacobi-Feld längs einer Geodätischen c_0 , und hat c_0 kompaktes Definitionsintervall, so gibt es eine geodätische Variation von c_0 mit Variationsfeld J .*

Beweis: a) Sei J Variationsfeld zu einer geodätischen Variation c . Da jede Kurve c_s eine Geodätische ist, haben wir

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial t} = 0.$$

Beim differenzieren der Gleichung nach s erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{Def. riem. Krümmung}}{=} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} + R\left(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\right) \frac{\partial c}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.44}}{=} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s} + R\left(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\right) \frac{\partial c}{\partial t}. \end{aligned}$$

An der Stelle $s = 0$ heißt es

$$0 = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R(J, c'_0) c'_0,$$

die Jacobi-Feld-Gleichung.

b) Sei nun umgekehrt J ein Jacobi-Feld längs einer Geodätischen c_0 . Sei t_0 im Definitionsintervall von c_0 . Wähle eine Kurve $s \mapsto \phi(s)$ mit $\phi(0) = c_0(t_0)$ und $\phi'(0) = J(t_0)$. Sei $s \mapsto X(s)$ das parallele Vektorfeld längs ϕ mit $X(0) = \frac{\nabla}{dt} J(t_0)$ und $s \mapsto Y(s)$ das parallele Vektorfeld längs ϕ mit $Y(0) = c'_0(t_0)$. Wir definieren

$$c(s, t) := \exp_{\phi(s)}((t - t_0)(sX(s) + Y(s))).$$

Dann gilt

$$c(0, t) = \exp_{c_0(t_0)}((t - t_0)c'_0(t_0)) = c(t)$$

und für jedes s ist $t \mapsto c(s, t)$ eine Geodätische. Da das Definitionsintervall I von c_0 kompakt ist, existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, so dass $c(s, t)$ für $(-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ definiert ist. Es ist klar, dass c eine geodätische Variation von c_0 ist. Nach a) ist das Variationsfeld \tilde{J} von c ebenfalls ein Jacobi-Feld, und es gilt

$$\tilde{J}(t_0) = \frac{\partial c}{\partial s}(0, t_0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{\phi(s)}(0) = \phi'(0) = J(t_0).$$

und

$$\frac{\nabla}{dt} \tilde{J}(t_0) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}(0, t_0) = \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t}(0, t_0) = \frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} (sX(s) + Y(s)) = X(0) + \frac{\nabla Y}{ds}(0) = \frac{\nabla}{dt} J(t_0).$$

Somit gilt $J = \tilde{J}$. □

Wir haben zwei Arten von den Jacobi-Feldern.

1). Uninteressante Jacobi-Felder, die dann vorliegen, wenn die zugehörige geodätische Variation einfach durch Umparametrisierung der Geodätischen c_0 zustande kommt. Mit c_0 ist auch $t \mapsto c_0(\alpha t + \beta t)$ eine Geodätische mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren für $a, b \in \mathbb{R}$ eine Geodätische Variation von c_0 durch

$$c(s, t) := c_0(ast + t + bs).$$

Dann hat das zugehörige Jacobi-Feld J die Anfangswerte

$$J(t_0) = \frac{\partial c}{\partial s}(0, t_0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_0(s(at_0 + b) + t_0) = (at_0 + b)c'_0(t_0)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} J(t_0) &= \frac{\nabla}{dt} \Big|_{t=t_0} ((at + b)c'_0(t)) = ac'_0(t)(at_0 + b) \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \Big|_{t=t_0} c'_0(t)}_{=0} \\ &= ac'_0(t). \end{aligned}$$

Da $(at + b)c'_0(t)$ auch Jacobi-Feld mit den gleichen Anfangswerten, gilt

$$J = (at + b)c'_0(t).$$

2). Wir haben noch interessante Jacobi-Felder, die bilden einen zweidimensionalen Untervektorraum. Die interessanten Jacobi-Felder sind solche, deren Anfangswerte $J(t_0)$ und $\frac{\nabla}{dt} J(t_0)$ beide Vielfache von $n(t_0)$ sind, die einer der beiden Einheitsvektoren sind, die auf $c'_0(t_0)$ senkrecht stehen.

Für ein solches interessantes Jacobi-Feld $J(t)$ gilt

$$J(t) = f(t) \cdot n(t),$$

wobei $n(t)$ von $n(t_0)$ durch Parallelverschiebung längs c_0 geliefert wird. In diesem Fall erfüllt f

$$(18) \quad f''(t) = -f(t)K(c_0(t)).$$

Beispiel 3.75. Ist die Gauß-Krümmung der Fläche konstant, $K = \kappa$, so kann man (18) explizit lösen. Setze

$$\mathfrak{s}_\kappa := \begin{cases} \sin(\sqrt{\kappa}t)/\sqrt{\kappa}, & \kappa > 0 \\ t, & \kappa = 0 \\ \sinh(\sqrt{|\kappa}t)/\sqrt{|\kappa|}, & \kappa < 0, \end{cases} \quad \mathfrak{c}_\kappa := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t), & \kappa > 0 \\ 1, & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa}t), & \kappa < 0, \end{cases}$$

so gilt

$$\mathfrak{c}_\kappa^2(t) + \kappa \mathfrak{s}_\kappa^2(t) = 1,$$

und

$$\mathfrak{s}'_\kappa(t) = \mathfrak{c}_\kappa(t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}'_\kappa(t) = -\mathfrak{s}_\kappa(t).$$

Insbesondere lösen die Funktionen \mathfrak{s}_κ und \mathfrak{c}_κ die Gleichung

$$f''(t) = -\kappa f(t).$$

Damit

$$J(t) = (\alpha \mathfrak{s}_\kappa(t) + \beta \mathfrak{c}_\kappa(t))n(t).$$

3.9. Der Divergenzsatz.

Definition 3.76. Unter einer *Fläche-mit-Rand* verstehen wir eine abgeschlossene Teilmenge S einer regulären Fläche $S_{\text{reg}} \subset \mathbb{R}^3$, so dass es zu jedem Punkt $p \in S$ eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S_{\text{reg}}$ von S_{reg} gibt mit $p \in F(U)$, so dass entweder

- $F(U) \subset S$ (dann heißt p *innerer Punkt* von S) oder
- $F^{-1}(S) = \{(x, y) \in U \mid y \geq 0\}$ und $F^{-1}(p) = (x, 0)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ (dann heißt p *Randpunkt* von S).

Die Menge der inneren Punkte bildet das *Innere* von S , die Menge der Randpunkte den *Rand* ∂S .

Beispiel 3.77. Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$S = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist eine Fläche-mit-Rand. Als reguläre Fläche können wir die $x - y$ -Ebene $S_{\text{reg}} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ nehmen. Die Punkte $(x, y, 0)$ mit $x^2 + y^2 < 1$ sind die inneren Punkte, denn wir erhalten durch $U := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 < r^2\}$ und $F(\xi, \eta) = (\xi, \eta, 0)$ eine lokale Parametrisierung von S_{reg} , deren Bild ganz in S enthalten ist. Hierbei ist $r := \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} > 0$.

Die Punkte $(x, y, 0)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ dagegen sind Randpunkte, z.B. für den $(0, -1, 0)$ wählen wir

$$F : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(\xi, \eta) = \left(\xi, \eta - \sqrt{1 - \xi^2}, 0\right)$$

eine lokale Parametrisierung von S_{reg} mit $F(0, 0) = (0, -1, 0)$ und $F^{-1}(S) = \{(\xi, \eta) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\infty, 1) \mid \eta \geq 0\}$.

Bemerkung.

a) Reguläre Flächen S sind auch Flächen-mit-Rand, nämlich gerade solche, für die der Rand leer ist, $\partial S = \emptyset$.

b) Die Punkte aus $F(\{(x, y) \in U \mid y = 0\})$ sind Randpunkte.

c) Sei $p \in \partial S$, so ist $c(t) := F(t, 0)$ eine reguläre Kurve mit $F(t, 0) \in \partial S$. Für $c(t_0) = p$ ist $c'(t_0) \in T_p S_{\text{reg}}$. Somit gibt es genau zwei Einheitsvektoren $\pm \nu(p) \in T_p S_{\text{reg}}$, diese nennen wir Einheitsnormalenvektoren an den Rand von S . Es gilt $(d_u F)^{-1}(c'(t_0)) = (1, 0)$ für $u = F^{-1}(p)$. Da S_{reg} eine reguläre Fläche ist, gilt $\langle (d_u F)^{-1}(\pm \nu(p)), (0, 1) \rangle \neq 0$. Wählen wir $\nu(p)$ so, dass $\langle (d_u F)^{-1}(\pm \nu(p)), (0, 1) \rangle < 0$, so heißt $\nu(p)$ *äußerer Einheitsnormalenvektor* an den Rand im Punkt p , $-\nu(p)$ dagegen heißt *innerer Einheitsnormalenvektor*.

Definition 3.78. Sei S eine Fläche-mit-Rand. Sei $f : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Wir schreiben $\partial S \cap \text{Supp} f = C_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_n$

als disjunkte Vereinigung, wobei jedes C_j ein Stück des Randes ist, das sich durch eine reguläre Kurve parametrisieren lässt. Wir wählen Parametrisierungen nach der Bogenlänge $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $c_j(I_j) = C_j$ und definieren das *Randintegral*

$$\int_{\partial S} f \, ds := \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \circ c_j(t) \, dt.$$

Zur Erinnerung: $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $df : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$. Das Gradientenfeld $\text{grad } f$ ist definiert durch

$$d_p f(X) = I(\text{grad } f, X), \quad X \in T_p S,$$

wobei I die erste Fundamentalform von S ist. Nun betrachten wir S mit riemannscher Metrik g und definieren das Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$ durch

$$df(x) = g(\text{grad } f, X), \quad \forall X \in T_p S.$$

$\text{grad } f$ ist ein Vektorfeld auf S .

Sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf S . Für $p \in S$ können wir das kovariante Differential von X als Endomorphismus von $T_p S$ auffassen

$$\nabla \cdot X : T_p S \rightarrow T_p S, \quad Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X.$$

Definition 3.79. Die Spur des Endomorphismus $\nabla \cdot X$ nennen wir *Divergenz* von X im Punkt p ,

$$\text{div } X(p) := \text{Spur}(Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X).$$

Lemma 3.80. Schreiben wir das Vektorfeld X bezüglich einer lokalen Parametrisierung F als

$$\sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i},$$

so gilt für die Divergenz

$$\text{div } X = \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i \right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right).$$

Beweis: Wir berechnen die Matrixdarstellung des Endomorphismus $Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X$ in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$.

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} X &= \nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial F}{\partial u^i} + \xi^i \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}. \end{aligned}$$

Der Endomorphismus $Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X$ ist also in der Matrixdarstellung

$$\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma_{ij}^k \right)_{jk}.$$

Spurbildung liefert

$$\operatorname{div} X = \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i \right).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) &= \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\ln \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \right) \right) \xi^j \\ &= \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} (\ln \det(g_{kl})) \xi^j \end{aligned}$$

folgt der zweite Teil aus dem ersten, falls wir zeigen können, dass

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} (\ln (\det(g_{kl}))) = \sum_i \Gamma_{ji}^i.$$

Aus der Definition

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{km}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \Gamma_{ji}^i &= \frac{1}{2} \sum_{ik} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{im} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{jm} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} g^{im} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{spur} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial u^j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \ln \det(g). \end{aligned}$$

□

Satz 3.81. (Gaußscher Divergenzsatz) Sei S_{reg} eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Sei X ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf S_{reg} mit kompaktem Träger. Sei $S \subset S_{\text{reg}}$ eine Fläche-mit-Rand. Sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld von S . Dann gilt

$$\int_S \operatorname{div} X \, dA = \int_{\partial S} g(X, \nu) \, ds.$$

Beweis: Da $\text{supp } X \cap S$ kompakt ist, kann $\text{supp } X \cap S$ durch endlich viele solcher Parameterbereiche überdeckt werden. Wir benutzen den Satz der Einheitsteilung und erhalten glatte Funktionen $\rho_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq \rho_i \leq 1$ und $\sum_i \rho_i \equiv 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } X \cap S$, so dass jeder Träger $\text{supp } \rho_j$ in einem solchen Parameterbereich enthalten ist. Wir setzen $X_j := \rho_j X$. Es gilt $X = \sum_j X_j$ auf S , und jedes X_j hat seinen Träger in einem Parameterbereich. Wegen der Linearität des Integrals und der Divergenz genügt es, die Behauptung für die X_j zu zeigen.

Nehmen wir also o.B.d.A. an, dass $\text{supp } X \cap S$ in einem derartigen Parameterbereich enthalten ist. Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Parameterbereich den Rand von S trifft. Die lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat also die Eigenschaft $F^{-1}(S) = \{(u^1, u^2) \in U \mid u^2 \geq 0\}$ und $\text{supp } X \cap S \subset F(U)$. O.B.d.A. nehmen wir ferner an, dass

$$F : U = (-a, a) \times (-a, a) \rightarrow S$$

ein an c angepasstes Fermi-Koordinatensystem ist, wobei c eine Bogenlängenparametrisierung von $\partial S \cap F(U)$ sei. Hierbei ist das Fermi-Koordinatensystem definiert durch

$$F(t, s) := \exp_{c(t)}(sn(t)) \quad n(t) = -\nu(c(t)).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass längs des Randes von S gilt

$$(g_{ij}(u^1, 0))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt dann $\sqrt{\det(g_{kl}(u^1, 0))} = 1$. Nach Lemma 3.80 rechnen wir für $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$

$$\begin{aligned} \int_S \text{div } X \, dA &= \int_0^a \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) \sqrt{\det(g_{kl})} \, du^1 du^2 \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) \, du^1 du^2. \end{aligned}$$

Den Summanden mit $j = 1$ integrieren wir zuerst über u^1 und erhalten

$$\int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^1 \right) \, du^1 = \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^1 \right) \Big|_{-a}^a = 0,$$

da $\xi^1(-a, u^2) = \xi^1(a, u^2) = 0$ wegen der Voraussetzung an den Träger. Für $j = 2$ integrieren wir ihn über u^2 und erhalten

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^2 \right) \, du^2 = \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \xi^2 \right) \Big|_0^a = -\xi^2(u^1, 0).$$

Also haben wir

$$\int_S \text{div } X \, dA = - \int_{-a}^a \xi^2(u^1, 0) \, du^1 du^1.$$

Für das Randintegral gilt

$$\int_{\partial S} g(X, \nu) dS = \int_{-a}^a -\xi^2(u^1, 0).$$

Wenn der Parameterbereich den Rand nicht trifft, zeigen die obigen Überlegungen

$$\int_S \operatorname{div} X dA = 0.$$

□

Definition 3.82 (Laplace-Operator). Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Wir definieren einen Operator

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

für eine C^2 -Funktion f . Der Operator Δ heißt Laplace-Operator. Eine Funktion, die

$$\Delta f = 0$$

erfüllt, heißt harmonisch. In einem lokalen Parameterbereich nach Lemma 3.80 erhalten wir

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\left(\sqrt{\det(g_{kl})} \right) g^{ij} \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^i} (F^{-1}) \right),$$

da $\operatorname{grad} f$ gegeben ist durch

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial(f \circ F)}{\partial u^i} (F^{-1}) \frac{\partial F}{\partial u^j}.$$

Korollar 3.83. Sei S eine kompakte reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld X und jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf S

$$\int_S \operatorname{div} X dA = 0 = \int_S \Delta f dA.$$

Beispiel 3.84. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. Sei $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion, z.B. der drei kartesischen Koordinatenfunktionen. Dann ist

$$f := l|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$$

harmonisch. Wir schreiben l als

$$l(X) = \langle X, Z \rangle, \quad \forall X$$

für einen Vektor $Z \in \mathbb{R}^3$. Der Gradient von f an der Stelle p ist gegeben durch Projektion von Z auf $T_p S$

$$\operatorname{grad} f(p) = Z - \langle Z, N(p) \rangle N(p),$$

wobei N eines der beiden Einheitsnormalenfelder an S ist. Diese Formel für den Gradienten können wir so zeigen:

$$\langle \text{grad } f(p), X \rangle = \partial_X f = \langle X, Z \rangle, \quad \forall X \in T_p S.$$

Für die kovariante Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X \text{grad } f &= d \text{grad } f(X) - \langle d \text{grad } f(X), N \rangle N \\ &= -\langle Z, dN(X) \rangle N - \langle Z, N \rangle dN(X) \\ &\quad + \langle \langle Z, dN(X) \rangle N, N \rangle N + \langle \langle Z, N(X) \rangle dN(X), N \rangle N \\ &= \langle Z, W(X) \rangle N + \langle Z, N \rangle W(X) - \langle Z, W(X) \rangle N + 0 \\ &= \langle Z, N \rangle W(X). \end{aligned}$$

$$\Delta f = \text{div grad } f = \text{spur}(Y \mapsto \nabla_Y \text{grad } f) = 2 \langle Z, N \rangle H.$$

Da S Minimalfläche ist, d.h., $H = 0$, folgt $\Delta f = 0$. ■

Definition 3.85. Sei S eine reguläre Fläche. Ein *symmetrisches* $(2,0)$ -Tensorfeld auf S ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in S$ eine symmetrische Bilinearform b_p auf $T_p S$ zuordnet, so dass bezüglich lokaler Parametrisierungen $F : U \rightarrow S$ die Funktionen

$$b_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_{ij}(u) := b_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right),$$

stets glatt sind.

Beispiel 3.86. Riemannsche Metriken sind gerade diejenigen symmetrischen $(2,0)$ -Tensorfelder, die in jedem Punkt $p \in S$ positiv definit sind.

Definition 3.87. Sei nun S eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g und einem weiteren symmetrischen $(2,0)$ -Tensorfeld b . Die *Spur* von b ist die Funktion $\text{Spur } b : S \rightarrow \mathbb{R}$, die bezüglich einer lokalen Parametrisierung F gegeben ist durch

$$(\text{Spur } b) \circ F = \sum_{i,j} g^{ij} b_{ij}.$$

Die *Divergenz* von b ist das Vektorfeld $\text{div } b$ auf S , das bezüglich einer lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$(\text{div } b)^l = \sum_{i,j,k} g^{kl} g^{ij} \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial u^i} - \sum_{\alpha} (\Gamma_{ij}^{\alpha} b_{\alpha k} + \Gamma_{ik}^{\alpha} b_{\alpha j}) \right).$$

Bemerkung. Ist $p \in S$ fest, so gibt es zu der symmetrischen Bilinearform b_p auf $T_p S$ genau einen bezüglich g_p selbstadjungierten Endomorphismus $B_p : T_p S \rightarrow T_p S$ mit $b_p(X, Y) = g_p(B_p(X), Y)$ für alle $X, Y \in T_p S$. In einer lokalen Parametrisierung $B_j^i = \sum_k g^{ik} b_{kj}$ und es gilt

$$(\text{Spur } b)(p) = \text{Spur}(B_p).$$

3.10. Variation der Metrik.

Definition 3.88. Sei S eine reguläre Fläche, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *1-Parameter-Familie riemannscher Metriken* auf S ist eine Zuordnung, die jedem $t \in I$ und jedem $p \in S$ ein euklidisches Skalarprodukt $g_{t,p}$ auf $T_p S$ zuordnet, so dass für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Abbildung

$$I \times U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, u^1, u^2) \mapsto g_{ij}(t, u^1, u^2) := g_{t, F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right)$$

glatt sind.

Beispiel 3.89. a) Sind zwei Metriken g_0 und g_1 gegeben, so ist

$$g_{t,t} := (1-t)g_{0,p} + tg_{1,p}, \quad t \in [0, 1]$$

eine 1-Parameter-Familie riemannscher Metriken.

b) $g_{t,p} = tg_p$, $t \in (0, \infty)$

c) Ist eine 1-Parameter-Familie riemannscher Metriken mit $t_0 \in I$ gegeben. Schreibe diese als Taylorentwicklung

$$g_{ij}(t, u^1, u^2) = g_{ij}(u^1, u^2) + (t - t_0)g'_{ij}(u^1, u^2) + O((t - t_0)^2),$$

wobei g'_{ij} ein symmetrisches $(2, 0)$ -Tensorfeld ist.

Lemma 3.90. *Mit den oben gemachten Definitionen gilt:*

$$(a) \quad (g^{jk})' = - \sum_{il} g^{ij} g'_{il} g^{lk}$$

$$(b) \quad (\Gamma_{ij}^k)' = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g'_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g'_{i\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g'_{ij}}{\partial u^\alpha} \right) - \sum_{\beta, l} \Gamma_{ij}^{\beta} g^{lk} g'_{\beta l}.$$

Beweis: Zum Beweis schreiben wir kürzer $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$. Die Formel für die Christoffel-Symbole schreibt sich dann als

$$(19) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i g_{j\alpha} + \partial_j g_{i\alpha} - \partial_\alpha g_{ij}).$$

(a) Wir differenzieren das Kronecker-Symbol und erhalten

$$0 = (\delta_i^k)' = (g_{ij} g^{jk})' = g'_{ij} g^{jk} + g_{ij} (g^{jk})'.$$

Daraus folgt

$$g_{ij} (g^{jk})' = -g'_{ij} g^{jk}$$

und somit die Behauptung (a).

(b) Differentiation der Gleichung (19) nach dem Parameter t liefert

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ij}^k)' &= \frac{1}{2} (g^{k\alpha})' (\partial_i g_{j\alpha} + \partial_j g_{i\alpha} - \partial_\alpha g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i g'_{j\alpha} + \partial_j g'_{i\alpha} - \partial_\alpha g'_{ij}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\alpha} g'_{\beta l} g^{lk} (\partial_i g_{j\alpha} + \partial_j g_{i\alpha} - \partial_\alpha g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i g'_{j\alpha} + \partial_j g'_{i\alpha} - \partial_\alpha g'_{ij}) \\ &= -\Gamma_{ij}^{\beta} g^{lk} g'_{\beta l} + \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_i g'_{j\alpha} + \partial_j g'_{i\alpha} - \partial_\alpha g'_{ij}). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.91. Die Variation des Flächenelements ergibt sich zu

$$(dA)' = \frac{1}{2} \operatorname{spur}(g') dA.$$

Beweis: Dies ist im Wesentlichen

$$\begin{aligned} (\sqrt{\det})' &= \frac{\frac{d}{dt} \det(g_{ij})}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \\ &= \frac{g^{kl} g'_{kl} \det(g_{ij})}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{spur}(g') \sqrt{\det(g_{ij})}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Damit wissen wir bereits

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} A[S, g_t] = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{spur}(g') dA.$$

Lemma 3.92. Die Variation der Gauß-Krümmung ist gegeben durch

$$2K' = \operatorname{div}(\operatorname{div}(g')) - \Delta(\operatorname{spur}(g')) - K \operatorname{spur}(g').$$

Beweis: Sei $p \in S$. Wählen wir riemannschen Normalkoordinaten (bzgl. g_{t_0}) um p .

(zur Erinnerung: Die Christoffel-Symbole:

- i) $F(0, 0) = p$
- ii) $g_{ij}(0, 0) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$
- iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, 0) = 0$ und $\Gamma_{ij}^k(0, 0) = 0 \quad i, j, k = 1, 2.$

Lemma 3.90 liefert in p

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{ijk}^l &= \partial_i \dot{\Gamma}_{kj}^l - \partial_j \dot{\Gamma}_{kl}^i + \dot{\Gamma}_{\alpha i}^l \Gamma_{kj}^\alpha + \Gamma_{\alpha j}^l \dot{\Gamma}_{kj}^\alpha - \dot{\Gamma}_{\alpha j}^l \Gamma_{ki}^\alpha - \Gamma_{\alpha j}^l \dot{\Gamma}_{ki}^\alpha \\ &= \partial_i \dot{\Gamma}_{kj}^l - \partial_j \dot{\Gamma}_{kl}^i \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha l} \partial_i (\partial_k \dot{g}_{j\alpha} + \partial_j \dot{g}_{k\alpha} - \partial_\alpha \dot{g}_{kj}) - \partial_i \Gamma_{kj}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha l} \partial_j (\partial_k \dot{g}_{i\alpha} + \partial_i \dot{g}_{k\alpha} - \partial_\alpha \dot{g}_{ki}) + \partial_j \Gamma_{ki}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha l} (\partial_i \partial_k \dot{g}_{j\alpha} - \partial_i \partial_\alpha \dot{g}_{kj} - \partial_j \partial_k \dot{g}_{i\alpha} + \partial_j \partial_\alpha \dot{g}_{ki}) - R_{ijk}^\beta g^{\alpha l} \dot{g}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Wegen $K = \frac{1}{2} g^{jk} R_{ijk}^i$ erhalten wir ...

□

Satz 3.93. Sei S eine kompakte reguläre Fläche. Dann ist die Zahl

$$\int_S K dA$$

unabhängig von der riemannschen Metrik.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S K dA &= \int_S \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\operatorname{div}(\dot{g})) - \Delta(\operatorname{spur}(\dot{g}))) - \frac{1}{2} K \operatorname{spur}(\dot{g}) \right\} dA \\ &\quad + \int_S K \frac{1}{2} \operatorname{spur}(\dot{g}) dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Korollar 3.94. Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen mit riemannschen Metriken. Sind S_1 und S_2 diffeomorph, so gilt

$$\int_{S_1} K dA = \int_{S_2} K dA.$$

Bemerkung. $\int_{T^2} K dA = 0$, $\int_{\mathbb{S}^2} K dA = 4\pi$